

Problema 1.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente

- El vector X tal que $A X = 0X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 3X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 2X$. (1,1 puntos).

Solución:

a) Buscamos el vector X / $A X = 0 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$ luego es un sistema compatible determinado, su solución es la trivial $x = y = 0$

El vector X buscado será: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Buscamos el vector X / $A X = 3 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$. Como $|1| = 1 \neq 0$ es un sistema compatible indeterminado.

$2x + y = 0$; $y = -2x$, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) Buscamos el vector X / $A X = 2 X$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo en el que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$. Como $|-1| = -1 \neq 0$ es un sistema compatible indeterminado.

$-x - y = 0$; $y = -x$, por lo tanto la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Y el vector X será: $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y + z = \alpha + 3 \\ 2x - y + z = \alpha + 1 \\ 3x + \alpha y + 2z = 4 \end{cases}$$
, se pide:

- Probar que es compatible para todo valor de α . (1,3 puntos).
- Obtener razonadamente el valor de α para el que el sistema es indeterminado. (1 punto).
- Resolver el sistema cuando $\alpha = 0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello. (1 punto).

Solución:

a) Probar que es compatible para todo valor de α .

La matriz de coeficientes de este sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{array} \right)$

Para conocer la compatibilidad del sistema estudiamos los rangos de estas dos matrices.

A es una matriz 3×3 , por lo que su máximo rango será 3,

A' es una matriz 3×4 , por lo que su máximo rango será 3

Estudiamos el rango de A .

Calculamos el menor de orden 3 de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2\alpha + 3 + 3 - \alpha - 4 = \alpha$$

Para $\alpha \neq 0$, $\text{ran}(A) = 3$. Como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$.

$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas, Sistema Compatible Determinado

Para $\alpha = 0$, escribimos la matriz A'

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, A . Sabemos que $|A| = 0$.

$$\text{El menor de orden 2 } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, A' . Orlando el menor no nulo anterior con la 3ª fila y 4ª columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 9 - 8 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

Y finalmente queda probado que para cualquier valor de α el sistema es compatible.

b) Según lo estudiado en el apartado anterior, el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 0$.

c) Resolver para $\alpha = 0$.

Del apartado a) sabemos que para $\alpha = 0$ $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, el menor de orden 2 no nulo de la matriz A nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que usaremos para resolver el sistema.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases} \quad \text{Sabemos que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3+z-1+z}{-3} = \frac{-4+2z}{-3} = \frac{4-2z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+-z-6+2z}{-3} = \frac{-5+z}{-3} = \frac{5-z}{3}$$

Y la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = \frac{4-2\lambda}{3} \\ x = \frac{5-\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tu Profe al Rescate

Problema 2.1. Dados los planos $\pi_1: x + y + z = 3$ y $\pi_2: x + y - \alpha z = 0$, se pide calcular razonadamente:

- a) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares y, para este valor de α , obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de estos dos planos. (1,5 puntos).
 b) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos y, para este valor de α , obtener la distancia entre los dos planos π_1 y π_2 . (1,8 puntos).

Solución:

a) Valor de α / $\pi_1 \perp \pi_2$

Sea $\vec{n}_\pi$ un vector ortogonal al plano π , entonces $\pi_1 \perp \pi_2$ si $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad \vec{n}_{\pi_2} = (1, 1, -\alpha)$$

Para que $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$ debe ser $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

$$(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -\alpha) = 0$$

$$1 + 1 - \alpha = 0$$

$$2 - \alpha = 0$$

$$\alpha = 2$$

Para $\alpha = 2$, ecuaciones paramétricas de $\pi_1 \cap \pi_2$

$$\text{La ecuación de la recta } r \text{ será: } r: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para obtener la ecuación paramétrica de la recta basta con resolver el sistema de ecuaciones que define a la recta.

$$\text{En el sistema anterior podemos calcular el siguiente menor de orden 2 no nulo } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

por lo que podemos tomar como incógnitas principales: y, z . El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} y + z = 3 - x \\ y - 2z = -x \end{cases}$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -x & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6 + 2x + x}{-3} = \frac{-6 + 3x}{-3} = 2 - x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-x \\ 1 & -x \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-x - 3 + x}{-3} = 1$$

$$\text{Por lo que las ecuaciones paramétricas de } r \text{ serán: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Valor de α / π_1 y π_2 sean paralelos.

π_1 y π_2 son paralelos si $\vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}$

Deberá ser:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-\alpha} \rightarrow \alpha = -1$$

Para $\alpha = -1$ calcular $d(\pi_1, \pi_2)$

Para este valor de α , $\pi_1: x + y + z = 3$ y $\pi_2: x + y + z = 0$

Como $\pi_1 \parallel \pi_2$, $d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$ siendo P_1 un punto de π_1 , por ejemplo, para $x = 0$ e $y = 0$, sustituyendo en la ecuación de π_1 , $0 + 0 + z = 3 \rightarrow z = 3$, por lo que $P_1(0, 0, 3)$

$$d(P_1, \pi_2) = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Problema 2.2. Dados el punto $O = (0, 0, 0)$ y el plano $\pi: x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:

- La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π . (1,1 puntos).
- Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π . (1,1 puntos).
- La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta r . (1,1 puntos).

Solución:

a) Recta r / r pasa por O y $r \perp \pi$

Como la recta r debe ser perpendicular al plano π , el vector ortogonal al plano π será vector director de la recta r .

Por lo que de la recta r conocemos: Punto $O(0, 0, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$

Ecuaciones de la recta r

$$\text{Paramétrica: } r: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \equiv \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Continua: } r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \quad \equiv \quad x = y = z$$

b) Simétrico de O respecto de π , O'

Debemos calcular,

- Recta que pasa por el punto O y es perpendicular a π , es la recta obtenida en el apartado anterior. Usaremos su ecuación paramétrica,

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Punto de corte entre r y π , M

A partir de la ecuación paramétrica de la recta r , sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano: $\lambda + \lambda + \lambda = 6$, $3\lambda = 6$, $\lambda = 2$

Sustituyendo este valor de λ en la recta, obtenemos el punto $M(2, 2, 2)$

- Obtenemos O' considerando que M es el punto medio del segmento OO' , es decir que

$$M = \frac{O + O'}{2} \rightarrow 2M = O + O' \rightarrow O' = 2M - O = 2(2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (4, 4, 4)$$

El simétrico del punto O respecto del plano π es $(4, 4, 4)$

c) Plano que contiene al eje X y a r , ψ

Un vector director del eje X es $(1, 0, 0)$. Un vector director de la recta r es $(1, 1, 1)$. Estos dos vectores no son paralelos (sus coordenadas no son proporcionales) por lo que son vectores directores del plano ψ .

Como punto del plano ψ podemos tomar cualquiera del eje X o de la recta r , por ejemplo consideramos el $(0, 0, 0)$ del eje X .

La ecuación del plano ψ será,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z - y = 0 \rightarrow y - z = 0$$

Luego el plano ψ tiene por ecuación $y - z = 0$

Problema 3.1. Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x \int_1^{x+1} f(t) dt$. Se pide obtener razonadamente:

- La integral $\int_1^{x+1} f(t) dt$ (1,5 puntos).
- La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$. (0,5 puntos).
- La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$. (1,3 puntos).

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \int_1^{x+1} f(t) dt &= \int_1^{x+1} (at + b) dt = \left[a \frac{t^2}{2} + b t \right]_1^{x+1} = \left[a \frac{(x+1)^2}{2} + b(x+1) \right] - \left[a \frac{1^2}{2} + b \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{a}{2} (x^2 + 2x + 1) + bx + b - \frac{a}{2} - b = \frac{a}{2} x^2 + a x + \frac{a}{2} + bx - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} x^2 + a x + bx = \frac{a}{2} x^2 + (a+b)x \end{aligned}$$

b)

$$F(x) = x \int_1^{x+1} f(t) dt$$

Considerando el resultado obtenido en el apartado anterior,

$$F(x) = x \left[\frac{a}{2} x^2 + (a+b)x \right] = \frac{a}{2} x^3 + (a+b)x^2$$

luego

$$F'(x) = \frac{3a}{2} x^2 + 2(a+b)x$$

c) En el apartado anterior obtuvimos $F'(x)$,

$$F'(x) = \frac{3a}{2} x^2 + 2(a+b)x$$

luego

$$F''(x) = 3a x + 2(a+b)$$

$$F''(0) = 2(a+b)$$

Como debe ser $F''(0) = 0 \rightarrow 2(a+b) = 0 \rightarrow a+b = 0 \rightarrow a = -b$

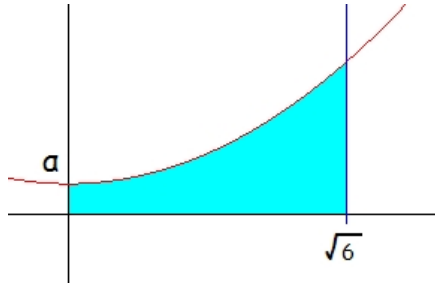
Finalmente, para que se verifique que $F''(0) = 0$ deber ser $a = -b$.

- Problema 3.2.** Para cada número real positivo α , se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:
- a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$. (2 puntos).
- b) El valor de α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 6 + \alpha)$, $(0, 6 + \alpha)$ en dos regiones de igual área. (1,3 puntos).

Solución:

a) $g(x) = x^2 + \alpha$, $\alpha > 0$. Gráficamente es una parábola de vértice $(0, \alpha)$

La región del plano limitada por eje X, eje Y, $x = \sqrt{6}$ e $y = g(x)$ será:



Calculamos el área de esta región mediante la siguiente integral,

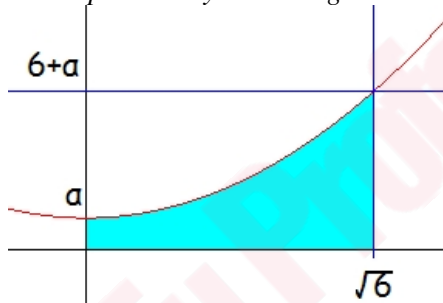
$$\int_0^{\sqrt{6}} (x^2 + \alpha) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \alpha x \right]_0^{\sqrt{6}} = \left[\frac{(\sqrt{6})^3}{3} + \alpha \sqrt{6} \right] - [0] = \frac{6\sqrt{6}}{3} + \alpha \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + \alpha \sqrt{6} = (2 + \alpha)\sqrt{6}$$

como el valor del área obtenido depende de α , el área pedida podemos escribirla como: $A(\alpha) = (2 + \alpha)\sqrt{6}$

b)

$$x = \sqrt{6} \rightarrow g(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 + \alpha = 6 + \alpha$$

Luego dibujando la parábola y el rectángulo tendríamos,



El área del rectángulo es $R(\alpha) = (6 + \alpha)\sqrt{6}$

El área de la zona pintada, según lo calculado en el apartado anterior, $A(\alpha) = (2 + \alpha)\sqrt{6}$

Debe ser $\frac{R(\alpha)}{2} = A(\alpha)$

$$\frac{(6 + \alpha)\sqrt{6}}{2} = (2 + \alpha)\sqrt{6}$$

El valor buscado de α es 2.

$$6 + \alpha = 4 + 2\alpha$$

$$6 - 4 = 2\alpha - \alpha$$

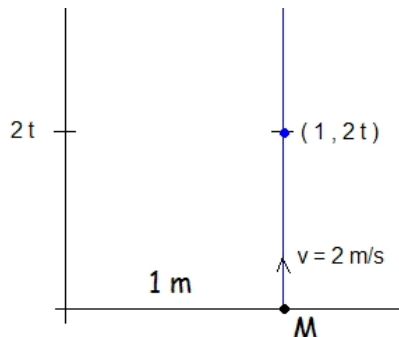
$$2 = \alpha$$

Problema 4.1. Un móvil se mueve con velocidad constante de 2 m/s , en el primer cuadrante, sobre la recta $x = 1$, partiendo del punto $M = (1,0)$ situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

- Las coordenadas del punto $M(t)$ donde está situado el móvil después de t segundos. (1 punto).
- La función $m(t)$ igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto $O = (0,0)$ y por el punto $M(t)$. (1,3 puntos).
- La derivada de la función $m(t)$. (1 punto).

Solución:

a)



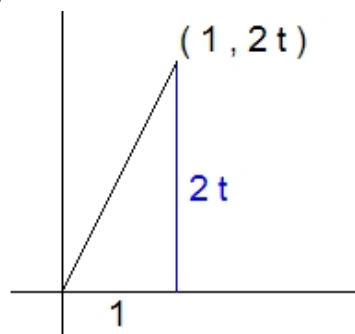
$M(t)$ es el punto en que está situado el móvil al cabo de t segundos.
Como el móvil se mueve a una velocidad constante de 2 m/s , al cabo de t segundos habrá recorrido $2t\text{ m}$;

$$e = v t$$

$$e = 2 t$$

Luego $M(t) = (1, 2t)$

b)



La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2t)$ es

$$m = \frac{2t}{1} = 2t$$

Luego $m(t) = 2t$

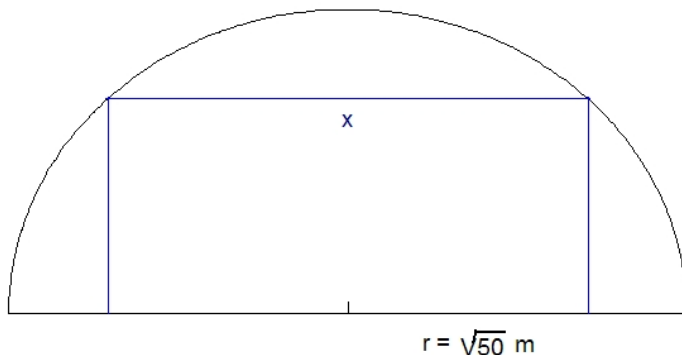
c) Como $m(t) = 2t$ entonces $m'(t) = 2$

Problema 4.2. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

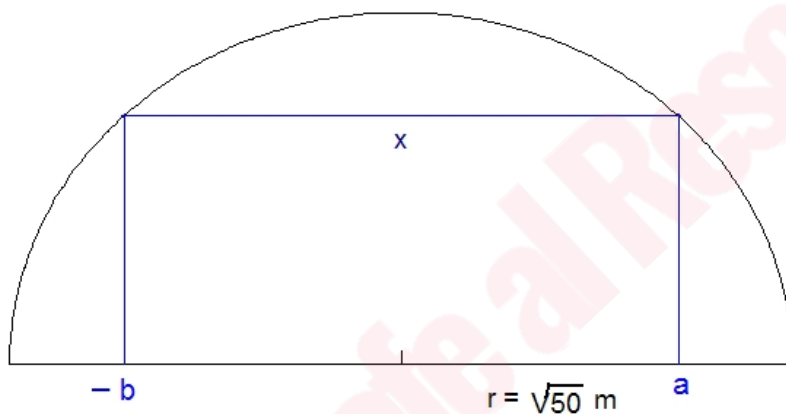
- El área del rectángulo en función de x . (1,3 puntos).
- El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. (2 puntos).

Solución:

a) Del enunciado del problema obtenemos que la representación gráfica de este es:



Situando este gráfico en unos ejes cuyo origen de coordenadas sea el centro desde el que se traza el semicírculo:



Vamos a comprobar que los vértices del rectángulo tienen por abscisa $-x/2$ y $x/2$.

Sean a y b dos números positivos y los vértices del rectángulo situados sobre el segmento rectilíneo que tengan de coordenadas $(-b, 0)$ y $(a, 0)$.

Calculemos las coordenadas de los vértices que están sobre la semicircunferencia.

La ecuación de una circunferencia es $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$

En este caso particular,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{50})^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 50$$

Las ordenadas de los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia serán,

$$\text{Para } \alpha = a \quad a^2 + \beta^2 = 50$$

$$\beta^2 = 50 - a^2$$

$$\beta = \pm\sqrt{50 - a^2}$$

Ahora bien, como el vértice que estamos calculando está sobre el eje X, $\beta > 0$, luego

$$\beta = \sqrt{50 - a^2}$$

$$\text{Para } \alpha = -b \quad (-b)^2 + \beta^2 = 50$$

$$b^2 + \beta^2 = 50$$

$$\beta = \sqrt{50 - b^2}$$

Pero los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia deben tener la misma ordenada, por lo que:

$$\sqrt{50-a^2} = \sqrt{50-b^2}$$

$$50-a^2 = 50-b^2$$

$$-a^2 = -b^2$$

$$a^2 = b^2 \rightarrow a = \pm b$$

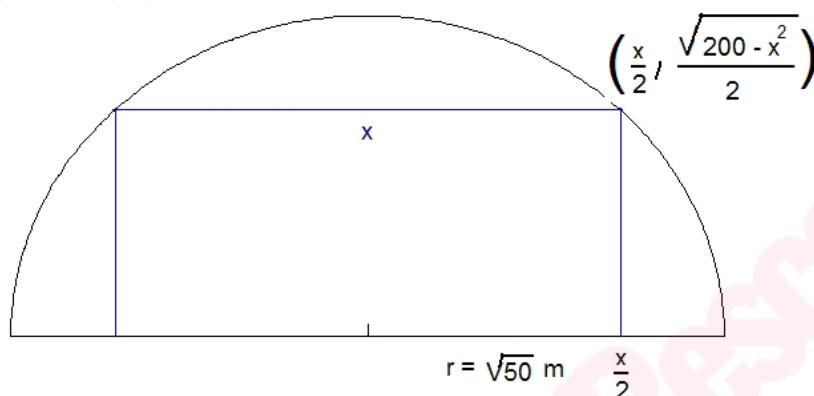
Por la elección que hemos hecho de a y b (ambos positivos), obtenemos que $a = b$.

$$\text{Tendiendo en cuenta que } a+b=x \rightarrow a+a=x \rightarrow 2a=x \rightarrow a=\frac{x}{2}$$

Por lo que la ordenada de los vértices que están sobre la semicircunferencia será:

$$\beta = \sqrt{50 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{50 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{200-x^2}{4}} = \frac{\sqrt{200-x^2}}{2}$$

La situación final del gráfico es,



El área del rectángulo será

$$A(x) = x \frac{\sqrt{200-x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

Veamos los valores que puede tomar x . Por definición x es una distancia entre dos puntos, luego $x \geq 0$. Además, puesto que el rectángulo está construido dentro de una semicircunferencia, se cumplirá que

$$\frac{x}{2} \leq \sqrt{50} \rightarrow x \leq 2\sqrt{50}. \quad \text{Luego } 0 \leq x \leq 2\sqrt{50} \quad (\approx 0 \leq x \leq 14.14)$$

b) ¿ x / área es máxima?

$$A(x) = \frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{200-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{200-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}} \right)$$

$$A'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{200-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}} \right) = 0$$

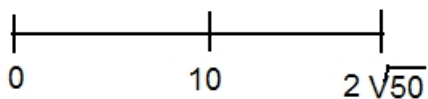
$$\sqrt{200-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}} = 0$$

$$200-x^2-x^2=0$$

$$200-2x^2=0 \rightarrow 200=2x^2 \rightarrow x^2=\frac{200}{2} \rightarrow x^2=100 \rightarrow x=\pm 10$$

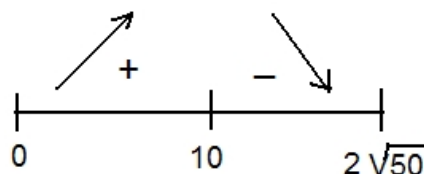
Como los valores de x deben ser mayores o iguales que cero, sólo sirve la solución $x = 10$.

Veamos ahora si para este valor de x $A(x)$ tiene un máximo, para ello estudiamos el signo de A' en los siguientes intervalos,



x	$A'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{200 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{200 - x^2}} \right)$
2	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{200 - 2^2} - \frac{2^2}{\sqrt{200 - 2^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{196} - \frac{4}{\sqrt{196}} \right) = \frac{1}{2} \left(14 - \frac{4}{14} \right) = 6.85... > 0$
12	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{200 - 12^2} - \frac{12^2}{\sqrt{200 - 12^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{56} - \frac{144}{\sqrt{56}} \right) = -5.87... < 0$

Marcando estos resultados en el intervalo anterior,



Luego en $x = 10$ hay un máximo relativo que es el absoluto de la función $A(x)$ ya que, en su dominio de definición, a la izquierda de 10 $A(x)$ es creciente y a la derecha decreciente.

Finalmente, el área del rectángulo es máxima para $x = 10$ m.

Tu Profeta al Rescate