

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Ingreso máximo del taller

Sean x e y las unidades diarias fabricadas de A y B. Cada producto A requiere 30 minutos de montaje y 40 de pintura; cada B, 40 minutos de montaje y 30 de pintura. Como hay 600 minutos disponibles para montar y 660 para pintar, las restricciones son

$$30x + 40y \leq 600 \iff 3x + 4y \leq 60, \quad 40x + 30y \leq 660 \iff 4x + 3y \leq 66,$$

además de $x, y \geq 0$. El ingreso es $I(x, y) = 40x + 35y$. Como se producen unidades enteras, relajamos primero esa condición y buscamos el máximo en la región poligonal; sus vértices son $(0, 0)$, $(16, 5, 0)$, $(12, 6)$ y $(0, 15)$. El punto de cruce se calcula resolviendo las dos igualdades de las restricciones:

$$3x + 4y = 60, \quad 4x + 3y = 66 \implies x = 12, y = 6.$$

Evaluamos el ingreso en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(16, 5, 0)$	$(12, 6)$	$(0, 15)$
$I(x, y)$	0	660	690	525

El máximo de la región relajada es 690 € en $(12, 6)$, que sí corresponde a cantidades enteras. Por eso también es el máximo de producción permitido.

$$x = 12 \text{ unidades de A, } y = 6 \text{ unidades de B; } I_{\max} = 690 \text{ €}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$. Factorizamos para leer el dominio y los cortes:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x-1)}, \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Los cortes con el eje X son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$; para $x = 0$, $f(0) = \frac{3}{2}$, luego el corte con Y es $(0, \frac{3}{2})$. En los puntos excluidos, los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

Así, $x = -2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Numerador y denominador tienen el mismo grado y el cociente de sus coeficientes principales es 1, por lo que

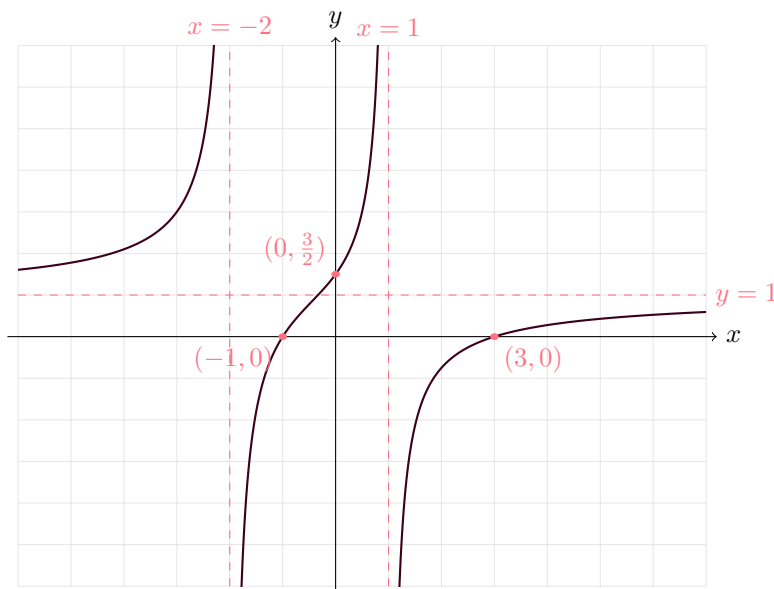
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1;$$

la asíntota horizontal es $y = 1$.

Derivamos para estudiar la variación:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x-2) - (x^2-2x-3)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2}.$$

El numerador es siempre positivo porque su discriminante es $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80 < 0$ y su coeficiente principal es positivo. El denominador también es positivo en el dominio. Por tanto, f crece en cada intervalo de su dominio: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$. No hay puntos críticos y, en consecuencia, no hay máximos ni mínimos locales.



$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; creciente en cada intervalo del dominio; no tiene extremos locales.

Problema 3 · Hibridación según la versión del coche

Sean H el suceso «híbrido» y V, U, S los sucesos de que el coche sea Van, Urban o SUV. Las tres versiones son excluyentes y cubren todos los coches, así que $P(S) = 1 - 0,20 - 0,40 = 0,40$. De los datos,

$$P(V \cap H) = 0,20(0,15) = 0,03, \quad P(U \cap H) = 0,40(0,40) = 0,16.$$

a) Para que sea Urban sabiendo que es híbrido,

$$P(U | H) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{0,16}{0,25} = 0,64.$$

b) La probabilidad de Van no híbrido es $0,20 - 0,03 = 0,17$, y la de no híbrido es $0,75$:

$$P(V | \bar{H}) = \frac{0,17}{0,75} = \frac{17}{75}.$$

c) La proporción de híbridos SUV es el total de híbridos menos los híbridos de las otras versiones:

$$P(S \cap H) = 0,25 - 0,03 - 0,16 = 0,06, \quad P(H | S) = \frac{0,06}{0,40} = 0,15.$$

d) «No Van ni híbrido» significa $\bar{V} \cap \bar{H}$. Restamos del total de no híbridos los Van no híbridos:

$$P(\bar{V} \cap \bar{H}) = 0,75 - 0,17 = 0,58.$$

a) 0,64; b) $\frac{17}{75}$; c) 0,15; d) 0,58.

Opción B

Problema 1 · Matriz ortogonal y sistema

La matriz es

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Sacamos el factor $1/3$ de cada fila para calcular el determinante:

$$\det A = \frac{1}{27} [1(4 - 1) + 2(4 + 2) + 2(2 + 4)] = \frac{27}{27} = 1.$$

b) Las filas tienen norma 1 y son mutuamente perpendiculares: antes de dividir por 3, cada fila tiene suma de cuadrados 9 y los productos escalares entre filas son $2 - 4 + 2 = 0$, $-2 - 2 + 4 = 0$ y $-4 + 2 + 2 = 0$. Por

ello $AA^t = I$, es decir, $A^{-1} = A^t$; la matriz es ortogonal. **c)** El sistema es $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como $A^{-1} = A^t$, multiplicamos por A^t :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 1; \quad A^{-1} = A^t; \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Problema 2 · Función definida a trozos

La función viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x \leq 1, \\ \frac{ax^2}{x^2 + 1}, & x > 1. \end{cases}$$

Las dos expresiones son continuas en sus tramos; solo hay que igualar el valor izquierdo en $x = 1$ con el límite derecho. El primer tramo vale 1, y el límite del segundo es $a/2$. Por tanto, la continuidad exige $a/2 = 1$, es decir, $a = 2$.

Con ese valor, en el primer tramo $f'(x) = 2x - 3 < 0$ para todo $x \leq 1$, así que la función decrece. En el segundo tramo,

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad (x > 1),$$

por lo que crece. En el punto de unión, el valor es 1; la función pasa de decrecer a crecer y tiene un mínimo local en $(1, 1)$.

Para las asíntotas, el denominador $x^2 + 1$ nunca se anula y en $x = 1$ la función es continua, por lo que no hay asíntotas verticales. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $2x^2/(x^2 + 1) \rightarrow 2$, así que $y = 2$ es asíntota horizontal por la derecha. Cuando $x \rightarrow -\infty$, rige el tramo polinómico y $f(x) \rightarrow +\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal por la izquierda.

La integral desde -2 hasta 1 usa solo el primer tramo. Una primitiva de $x^2 - 3x + 3$ es $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x$:

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1 = \frac{11}{6} - \left(-\frac{44}{3} \right) = \frac{33}{2}.$$

$$a = 2; \quad f \text{ decrece en } (-\infty, 1] \text{ y crece en } [1, +\infty); \quad \min f = (1, 1); \quad \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{33}{2}.$$

Problema 3 · Puntualidad y medio de transporte

Sean A , P y C los sucesos de acudir andando, en transporte público o en coche propio; sea T llegar tarde. El coche se usa el 70% de las veces. El 30% restante se reparte entre público y andando, y el público se usa el doble que andando. Por tanto,

$$P(A) = 0,10, \quad P(P) = 0,20, \quad P(C) = 0,70.$$

Las tasas de retraso son $P(T | A) = 0,01$, $P(T | P) = 0,03$ y $P(T | C) = 0,06$. **a)** Sumamos las probabilidades de llegar puntual por cada medio:

$$P(\bar{T}) = 0,10(0,99) + 0,20(0,97) + 0,70(0,94) = 0,951.$$

b) La probabilidad total de retraso es $1 - 0,951 = 0,049$. Aplicando Bayes,

$$P(P | T) = \frac{P(P)P(T | P)}{P(T)} = \frac{0,20(0,03)}{0,049} = \frac{6}{49}.$$

c) «No andando y puntual» comprende público puntual o coche puntual:

$$P(\bar{A} \cap \bar{T}) = 0,20(0,97) + 0,70(0,94) = 0,852.$$

Por tanto,

$$P(\bar{A} | \bar{T}) = \frac{0,852}{0,951} = \frac{284}{317}.$$

$$P(\text{puntual}) = 95,1\%; \quad P(\text{público} | \text{tarde}) = \frac{6}{49}; \quad P(\text{no andando} | \text{puntual}) = \frac{284}{317}.$$