

Junio de 2026 - Convocatoria extraordinaria de reserva

Estas soluciones desarrollan todos los apartados del examen. En cada bloque se parte de la ley o definición que se aplica, se sustituyen los datos y se interpreta el resultado.

Pregunta 1 - Probabilidad y estadística

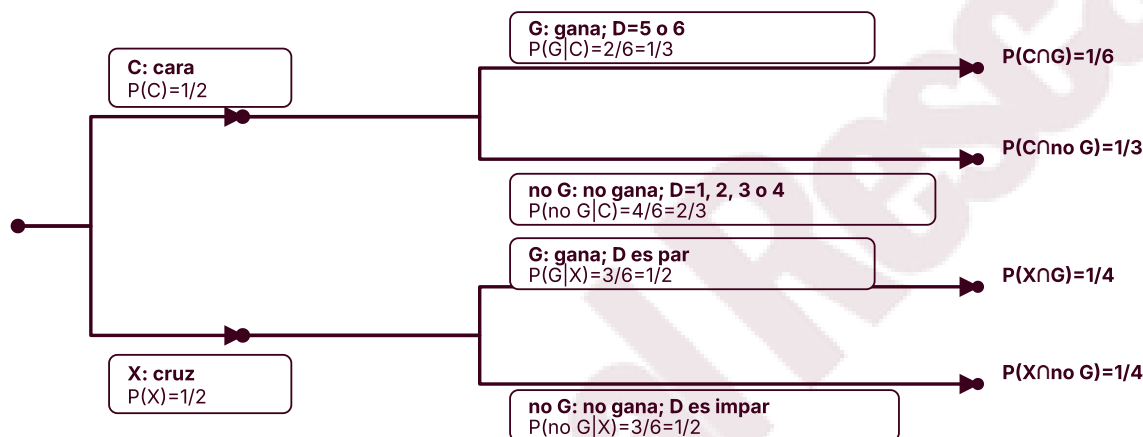
1.1 Probabilidad de ganar una ronda

Definimos los sucesos con palabras sencillas:

- C : sale cara, con $P(C) = \frac{1}{2}$; X : sale cruz, con $P(X) = \frac{1}{2}$. - G : el alumno gana; D : resultado obtenido en el dado.

El juego tiene dos pasos: primero se lanza la moneda y después el dado. Si sale cara, se gana con $D = 5$ o $D = 6$. Si sale cruz, se gana cuando D es par, es decir, $2, 4$ o 6 . Cada camino completo del árbol representa una partida posible.

En cada rama aparece una probabilidad condicionada. Por ejemplo, $P(G | C) = \frac{2}{6}$ significa «probabilidad de ganar sabiendo que salió cara». Para cada camino multiplicamos sus dos ramas y, al sumar los dos caminos ganadores, obtenemos $P(G)$:



La probabilidad total de ganar es

$$P(G) = P(C)P(G | C) + P(X)P(G | X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Conclusión: la probabilidad de ganar una ronda cualquiera es $\frac{5}{12}$.

1.2 Probabilidad de que saliera cara sabiendo que se ganó

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(C | G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)}.$$

La intersección $C \cap G$ corresponde a cara y dado 5 o 6, por lo que

$$P(C \cap G) = P(C)P(G | C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Sustituyendo el resultado de 1.1,

$$P(C | G) = \frac{1/6}{5/12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{2}{5}.$$

Conclusión: sabiendo que ganó, la probabilidad de que hubiese salido cara es $\frac{2}{5}$.

1.3 Exactamente cinco victorias en siete rondas con cara segura

La moneda trucada siempre da cara, así que solo se gana cuando el dado es 5 o 6:

$$p = P(G) = P(D = 5 \text{ o } D = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad 1 - p = \frac{2}{3}.$$

Las siete rondas son independientes. Si (Y) es el número de victorias,

$$Y \sim B\left(7, \frac{1}{3}\right).$$

Usamos la fórmula binomial para cinco éxitos:

$$P(Y = 5) = \binom{7}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 21 \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{4}{9} = \frac{84}{2187} = \boxed{\frac{28}{729}} \approx 0.0384.$$

Conclusión: la probabilidad pedida es $\frac{28}{729}$, aproximadamente **0.0384**, es decir, un **3.84%**.

Pregunta 2 - Álgebra

2.1 Discusión del sistema por Rouché-Frobenius

El sistema es

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ -x + y + \alpha z = 2. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \end{array} \right).$$

Como hay tres incógnitas, el sistema es compatible determinado si $(\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3)$, incompatible si los rangos son distintos y compatible indeterminado si son iguales pero menores que 3.

Paso 1. Determinante de (A)

Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha + 1) - (\alpha + 1) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha - 2 \\ &= (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2. \end{aligned}$$

Preguntamos cuándo se anula:

$$\det A = 0 \iff (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2 = 0 \iff \boxed{\alpha = 2 \text{ o } \alpha = -1}.$$

Paso 2. Caso $\alpha \neq -1, 2$

$$\det A \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 3.$$

Además, A^* tiene tres filas, por lo que $(\text{rg}(A^*) \leq 3)$. Al contener a (A), también $(\text{rg}(A^*) \geq 3)$, y por tanto

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Conclusión del caso: para $\alpha \neq -1, 2$, el sistema es **SCD**.

Paso 3. Caso $\alpha = -1$

$$A|_{\alpha=-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las filas segunda y tercera son opuestas o iguales a la primera, y la primera no es nula. Por tanto,

$$\text{rg}(A) = 1.$$

La matriz ampliada es

$$A^*|_{\alpha=-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Para justificar su rango mediante un menor de orden 2, tomamos las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 4:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{rg}(A^*) \geq 2.$$

Como A^* tiene tres filas, y sus menores de orden 3 son nulos porque $\det A = 0$, resulta $(\text{rg}(A^*)=2)$. Así,

$$\text{rg}(A) = 1 \neq 2 = \text{rg}(A^*).$$

Conclusión del caso: para $\alpha = -1$, el sistema es SI.

Paso 4. Caso $\alpha = 2$

$$A|_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante es cero, luego $(\text{rg}(A)=2)$. Sin embargo, el menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 2.$$

La ampliada es

$$A^*|_{\alpha=2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Comprobamos un menor de orden 3 usando las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 1) - 1(2 + 1) = 3 \neq 0.$$

Por consiguiente, $(\text{rg}(A^*)=3)$, y

$$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*).$$

Conclusión del caso: para $\alpha = 2$, el sistema es SI.

En resumen,

Valor de α	Clasificación
$\alpha \neq -1, 2$	SCD
$\alpha = -1$	SI
$\alpha = 2$	SI

No aparece ningún valor de α con sistema compatible indeterminado.

2.1.2 Solución cuando el sistema es compatible

Solo hay solución para $\alpha \neq -1, 2$. Aplicamos la regla de Cramer, cuya fórmula teórica es

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad \Delta = \det A.$$

Ya tenemos

$$\Delta = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2.$$

Para (x), sustituimos la primera columna por los términos independientes:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= -(\alpha + 1) + 2 + 2\alpha \\ &= \alpha + 1. \end{aligned}$$

Para (y), sustituimos la segunda columna:

$$\begin{aligned}\Delta_y &= \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(\alpha - 2) - 3 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha - 3 = (\alpha + 1)(\alpha - 3).\end{aligned}$$

Para (z), sustituimos la tercera columna:

$$\begin{aligned}\Delta_z &= \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(2\alpha - 1) - 3 \\ &= 2\alpha^2 - \alpha - 3 = (\alpha + 1)(2\alpha - 3).\end{aligned}$$

Por tanto, para $\alpha \neq -1, 2$,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}, \\ y &= \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)^2} = \frac{\alpha - 3}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}, \\ z &= \frac{(\alpha + 1)(2\alpha - 3)}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)^2} = \frac{2\alpha - 3}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}.\end{aligned}$$

Conclusión: la solución es

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}, \frac{\alpha - 3}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)}, \frac{2\alpha - 3}{(\alpha - 2)(\alpha + 1)} \right), \alpha \neq -1, 2.$$

2.2 Matriz de simulación

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Valores que cumplen $A^2 - I = 2A$

Primero calculamos A^2 , multiplicando fila por columna:

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & (1-a) + (1+a) \\ (1-a) + (1+a) & 1 + (1+a)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Restamos (I):

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$2A = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Igualando las matrices, basta comparar las entradas diagonales:

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a, \\ a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a. \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Así,

$$a^2 = 1 \implies \boxed{a = -1 \text{ o } a = 1}.$$

Conclusión: la igualdad matricial se cumple para $a \in \{-1, 1\}$.

2.2.2 Inversa de (A)

Para una matriz 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}, ps - qr \neq 0.$$

Calculamos primero el determinante:

$$\det A = (1 - a)(1 + a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2.$$

La matriz es invertible si y solo si

$$-a^2 \neq 0 \iff a \neq 0.$$

Los menores y cofactores son

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1+a & -1 \\ 2 & -1 & 1-a \end{array} \implies \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}}, a \neq 0.$$

Conclusión: (A) admite inversa exactamente cuando $a \neq 0$, y la expresión anterior es su inversa.

Pregunta 3 - Geometría

3.1 Posición relativa de dos rectas

Las rectas vienen dadas por

$$r : \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}, s : \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}.$$

Paso 1. Pasar ambas rectas a forma paramétrica

En (r), tomamos $x = t$. Entonces $y = a - 2t$ y $z = 1$:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En (s), tomamos $z = u$. De $x + z = a$ sale $x = a - u$. Sustituyendo en la primera ecuación,

$$-(a - u) + 2y + 2u = 5 \implies 2y = 5 + a - 3u \implies y = \frac{5 + a - 3u}{2}.$$

Por tanto,

$$s : \begin{cases} x = a - u \\ y = \frac{5 + a - 3u}{2} \\ z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Los vectores directores asociados a estas formas paramétricas son $((1, -2, 0))$ y $((-1, -3/2, 1))$. No son proporcionales porque el tercero tiene componente (0) y el segundo componente (1). Por eso las rectas no son paralelas ni coincidentes: o se cortan o son cruzadas.

Paso 2. Condición para que se corten

Igualemos las coordenadas de los puntos paramétricos:

$$\begin{cases} t = a - u, \\ a - 2t = \frac{5 + a - 3u}{2}, \\ 1 = u. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $u = 1$. La primera da $t = a - 1$. Sustituyendo ambos valores en la segunda,

$$a - 2(a - 1) = \frac{5 + a - 3}{2} \Rightarrow 2 - a = \frac{a + 2}{2} \Rightarrow 4 - 2a = a + 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}.$$

Si $a = 2/3$, se cortan; si $a \neq 2/3$, son cruzadas.

Para $a = 2/3$,

$$t = a - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, u = 1.$$

El punto de corte es

$$\boxed{P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)}.$$

Conclusión: las rectas se cortan únicamente para $a = 2/3$; para cualquier otro valor de a son rectas cruzadas.

3.1.3 Distancia entre (O) y (P)

La fórmula de distancia entre $O=(0,0,0)$ y $P=(x_P, y_P, z_P)$ es

$$d(O, P) = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}.$$

Solo está definida aquí cuando $a = 2/3$, porque solo entonces existe el punto de corte (P):

$$\begin{aligned} d(O, P) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{26}}{3}}. \end{aligned}$$

3.2 Planos en forma general

Se dan el plano y la recta

$$\pi : 2x + y - 3 = 0, \quad r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

De la forma paramétrica de (r) obtenemos el vector director ($v_r=(1,-2,0)$) y un punto ($P=(1,-1,1)$). El vector normal de (π) es ($n_\pi=(2,1,0)$).

3.2.1 Plano perpendicular a (π) que contiene a (r)

Escribimos el plano buscado en forma general:

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Como $r \subset \pi_1$, su vector director debe ser paralelo al plano, es decir, perpendicular a su normal:

$$(A, B, C) \cdot (1, -2, 0) = 0 \Rightarrow A - 2B = 0.$$

Como $\pi_1 \perp \pi$, sus normales son perpendiculares:

$$(A, B, C) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow 2A + B = 0.$$

Resolvemos las dos condiciones:

$$A = 2B, \quad 2(2B) + B = 0 \Rightarrow 5B = 0 \Rightarrow A = B = 0.$$

Por tanto, $C \neq 0$ y podemos tomar $C = 1$. El plano queda $z + D = 0$. Como contiene a ($P=(1,-1,1)$),

$$1 + D = 0 \Rightarrow D = -1.$$

Conclusión:

$$\boxed{\pi_1 : z - 1 = 0}.$$

3.2.2 Plano paralelo a (π) que contiene a (r)

Un plano paralelo a (π) tiene el mismo vector normal, por lo que en forma general es

$$\pi_2 : 2x + y + D = 0.$$

Para que contenga a (r), basta imponer que contenga el punto (P=(1,-1)) de la recta:

$$2 \cdot 1 + (-1) + D = 0 \implies 1 + D = 0 \implies D = -1.$$

Conclusión: sí existe y es

$$\pi_2 : 2x + y - 1 = 0.$$

Pregunta 4 - Análisis

4.1 Estudio de $f(x)=|2x^2-3|$ en $([-1,5])$

Dominio y asíntotas

La expresión $2x^2 - 3$ es un polinomio y el valor absoluto está definido para cualquier número real. Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

En el examen se estudia la restricción de (f) al intervalo $([-1,5])$.

Comprobamos las asíntotas:

- **Asíntotas verticales:** no existen, porque el dominio es todo $\mathbb{R}$ y (f) es continua en todos los puntos. - **Asíntotas horizontales:** no existen, ya que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |2x^2 - 3| = +\infty.$$

- **Asíntotas oblicuas:** tampoco existen; el crecimiento es cuadrático y para cualquier recta $(mx+n)$, $(f(x)-(mx+n))$ no tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Expresión por intervalos

Los cambios del valor absoluto se producen cuando

$$2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En todo $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ o } x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ 3 - 2x^2, & -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Como $-\sqrt{3/2} < -1$, el primer punto de cambio queda fuera del intervalo que nos piden. Por eso en $([-1,5])$, con $a = \sqrt{3/2}$, usamos

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2, & -1 \leq x \leq a, \\ 2x^2 - 3, & a \leq x \leq 5. \end{cases}$$

4.1.1 Crecimiento y decrecimiento

Derivamos cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & -1 < x < a, \\ 4x, & a < x < 5. \end{cases}$$

Los puntos que debemos estudiar son $x = 0$, donde $(f'(0)=0)$, y $x = a$, donde cambia la expresión y la derivada no existe. Comprobamos el signo de la derivada con un punto de prueba en cada intervalo:

Intervalo Punto de prueba Derivada Signo Comportamiento

$(-1,0)$	$x=-1/2$	$-4(-1/2)=2$	+	Crece
$(0,a)$	$x=1/2$	$-4(1/2)=-2$	-	Decrece
$(a,5)$	$x=2$	$4(2)=8$	+	Crece

En $x = 0$ el signo pasa de (+) a (-), luego hay un máximo local. En $x = a$ el signo pasa de (-) a (+), luego hay un mínimo local, aunque la derivada no exista en ese punto.

Conclusión: f crece en $(-1,0) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 5\right)$ y decrece en $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

4.1.2 Extremos absolutos

Evaluamos los extremos del intervalo y los puntos críticos o de cambio:

$$f(-1) = |2(-1)^2 - 3| = 1,$$

$$f(0) = |2 \cdot 0^2 - 3| = 3,$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0,$$

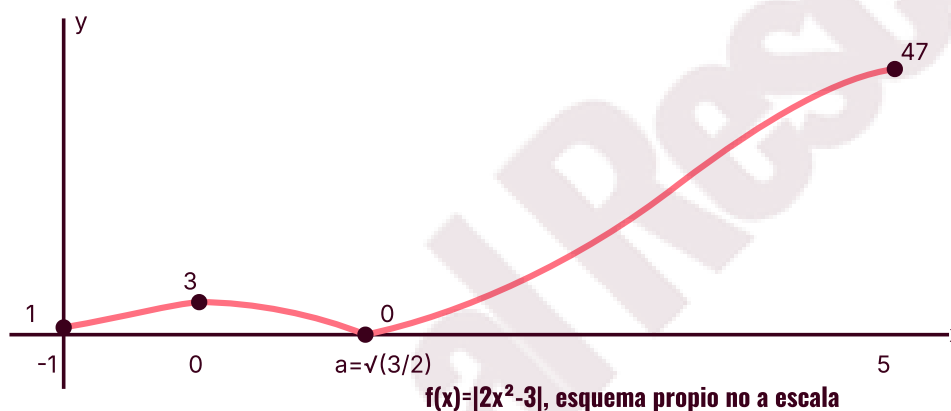
$$f(5) = |2 \cdot 5^2 - 3| = 47.$$

Comparando (1,3,0,47):

$$\boxed{\text{mínimo absoluto } 0 \text{ en } x = \sqrt{\frac{3}{2}}}, \quad \boxed{\text{máximo absoluto } 47 \text{ en } x = 5}.$$

4.1.3 Representación propia de la función

La gráfica siguiente representa la parábola interior reflejada sobre el eje (X) y restringida a $[-1,5]$. Se señalan los puntos que justifican la tabla anterior.



4.1.4 Área limitada por la curva

El área es la suma de dos integrales porque (f) cambia de expresión en $a = \sqrt{3/2}$:

$$A = \int_{-1}^a (3 - 2x^2) dx + \int_a^5 (2x^2 - 3) dx.$$

Integramos antes de sustituir:

$$\int (3 - 2x^2) dx = 3x - \frac{2x^3}{3}, \quad \int (2x^2 - 3) dx = \frac{2x^3}{3} - 3x.$$

Ahora evaluamos con los corchetes y los intervalos correspondientes:

$$\begin{aligned} A &= \left[3x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{\sqrt{3/2}} + \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\sqrt{3/2}}^5 \\ &= \left(\sqrt{6} + \frac{7}{3} \right) + \left(\frac{205}{3} + \sqrt{6} \right) \\ &= \boxed{\frac{212}{3} + 2\sqrt{6}} \approx 75.5656 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Conclusión: el área pedida es $\frac{212}{3} + 2\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

4.2 Optimización del volumen de un comedero semicilíndrico

4.2.1 Función volumen en función de (r)

El comedero es medio cilindro, por lo que su volumen es

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 L.$$

El área de chapa está formada por la superficie lateral curva y los dos extremos semicirculares:

$$A_{\text{curva}} = \pi r L, \quad A_{\text{extremos}} = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$

Como el área total vale 600π ,

$$\pi r L + \pi r^2 = 600\pi \implies r L + r^2 = 600.$$

Despejamos la longitud:

$$r L = 600 - r^2 \implies L = \frac{600 - r^2}{r}.$$

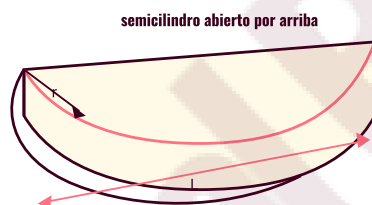
Para que el comedero sea físico, $r > 0$ y $L > 0$; por tanto,

$$0 < r < \sqrt{600} = 10\sqrt{6}.$$

Sustituimos (L) en el volumen:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \left(\frac{600 - r^2}{r} \right) \\ &= \left[\frac{\pi}{2} (600r - r^3) \right], \quad 0 < r < 10\sqrt{6}. \end{aligned}$$

La función es un polinomio en su dominio físico. Además, $\lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) = 0$ y $\lim_{r \rightarrow (10\sqrt{6})^-} V(r) = 0$; no hay asíntotas verticales ni horizontales en el dominio de la situación física.



4.2.2 Radio y longitud que maximizan el volumen

Derivamos la función de volumen:

$$V'(r) = \frac{\pi}{2} (600 - 3r^2).$$

Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero:

$$\begin{aligned} V'(r) = 0 &\iff \frac{\pi}{2} (600 - 3r^2) = 0 \\ &\iff 600 - 3r^2 = 0 \\ &\iff r^2 = 200. \end{aligned}$$

Como $r > 0$,

$$r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Comprobamos el cambio de signo de $V'(r)$ dentro del dominio físico:

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $600 - 3r^2$	Comportamiento
$(0, 10\sqrt{2})$	$r=1$	$600-3=597>0$	V crece
$(10\sqrt{2}, 10\sqrt{6})$	$r=20$	$600-3\cdot 400=-600<0$	V decrece

El signo pasa de positivo a negativo, así que el punto crítico proporciona un máximo absoluto en el dominio físico.

$$\begin{aligned} L &= \frac{600 - r^2}{r} = \frac{600 - 200}{10\sqrt{2}} = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \text{ cm}, \\ V_{\text{max}} &= \frac{\pi}{2} r^2 L = \frac{\pi}{2} (200)(20\sqrt{2}) = 2000\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Conclusión: el volumen máximo se obtiene con radio $10\sqrt{2}$ cm y longitud $20\sqrt{2}$ cm, y vale $2000\pi\sqrt{2}$ cm³.