

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2005 · Convocatoria ordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Reparto de propaganda

Sean E , P y J las hojas que reparten diariamente Elena, Pedro y Juan. Como Pedro reparte el 20% del total, si $T = E + P + J$, se cumple $P = 0,2T$. Las otras condiciones dan $J = E + 100$ y $E + P = 850$. Planteamos el sistema:

$$P = 0,2(E + P + J), \quad J = E + 100, \quad E + P = 850.$$

De las dos últimas ecuaciones, $E = 850 - P$ y $J = 950 - P$. Al sustituir en la primera,

$$P = 0,2(1800 - P) \Rightarrow 1,2P = 360 \Rightarrow P = 300.$$

Entonces $E = 550$ y $J = 650$. La comprobación da un total de 1500 hojas, cuyo 20% son las 300 de Pedro.

Elena: 550, Pedro: 300, Juan: 650 hojas.
--

Problema 2 · Coste mínimo de vitaminas

Sean x e y las pastillas diarias de Energic y Vigor. Para cubrir las cantidades mínimas de vitaminas, las restricciones son

$$3x + 2y \geq 36 \text{ (A)}, \quad 2x + 2y \geq 28 \text{ (C)}, \quad 8x + 2y \geq 34 \text{ (D)}, \quad x, y \geq 0.$$

El coste que queremos minimizar es $C(x, y) = 0,03x + 0,04y$. La región factible tiene vértices $(0, 18)$, $(8, 6)$ y $(14, 0)$: $(8, 6)$ es la intersección de las restricciones de A y C; los otros dos están sobre los ejes y cumplen todas las condiciones. En $(8, 6)$ se cubren exactamente 36 mg de A y 28 mg de C, y se obtienen 76 mg de D, por lo que el punto es factible. Comparamos el coste:

(x, y)	$(0, 18)$	$(8, 6)$	$(14, 0)$
$C \text{ (€)}$	0,72	0,48	0,42

Tomar 14 pastillas Energic y ninguna Vigor; coste mínimo: 0,42 €.

Problema 3 · Beneficio de la fábrica de golosinas

La función $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$ mide el beneficio mensual en miles de euros, con $x \geq 0$ toneladas vendidas.

a) Para maximizar el beneficio derivamos y buscamos el punto crítico:

$$f'(x) = -0,2x + 2,5 = 0 \implies x = 12,5.$$

Como $f''(x) = -0,2 < 0$, la función es cóncava y ese punto es un máximo. Su valor es $f(12,5) = 5,625$ miles de euros.

b) No hay pérdidas cuando $f(x) \geq 0$. Las raíces son

$$-0,1x^2 + 2,5x - 10 = 0 \iff x^2 - 25x + 100 = 0 \iff x = 5 \text{ o } x = 20.$$

La parábola abre hacia abajo, así que el beneficio es no negativo entre ambas raíces. La cantidad mínima es 5 toneladas.

c) El beneficio por tonelada es el cociente entre beneficio total y toneladas:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = -0,1x + 2,5 - \frac{10}{x}, \quad x > 0.$$

Derivando, $g'(x) = -0,1 + 10/x^2 = 0$ da $x = 10$ (la otra raíz no es positiva). Para $x < 10$, $g'(x) > 0$; para $x > 10$, $g'(x) < 0$, por lo que allí se maximiza el beneficio por tonelada. Se obtiene $g(10) = 0,5$ miles de euros por tonelada y un beneficio total $f(10) = 5$ miles de euros.

$f_{\max} = 5625 \text{ € en } 12,5 \text{ t}; \quad x_{\min, \text{ sin pérdidas}} = 5 \text{ t},$ $g_{\max} = 500 \text{ €/t en } 10 \text{ t } (f = 5000 \text{ €}).$

Problema 4 · Operaciones con sucesos

Se conocen $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Usamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para no contar dos veces la intersección:

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7.$$

La probabilidad condicionada se obtiene dividiendo la probabilidad de la intersección entre la probabilidad del suceso condicionante:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

Como $A \cap B \subseteq A$, si sabemos que ocurrió $A \cap B$, necesariamente ocurrió A : $P(A | A \cap B) = 1$. Finalmente, $A \subseteq A \cup B$, por lo que

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}.$$

$P(A \cup B) = 0,7, \quad P(A B) = \frac{1}{3}, \quad P(A A \cap B) = 1, \quad P(A A \cup B) = \frac{5}{7}.$
--

Ejercicio B

Problema 1 · Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y el vector de términos independientes dan el sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + 5y + z = 1. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda resulta $y = 0$; la tercera es compatible con esa condición. Entonces la primera ecuación da $z = 1 - 2x$. Hay un parámetro libre, así que existen infinitas soluciones. En términos de rangos, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, donde 3 es el número de incógnitas; por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (t, 0, 1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Compra de microondas

Sean x el número de microondas con más accesorios y y el número del otro modelo. El presupuesto, el espacio de almacenaje y el límite de ventas del modelo caro imponen

$$150x + 100y \leq 350000, \quad x + y \leq 3000, \quad x \leq 2000, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio es $B = 15x + 11y$. Al ser lineal, basta comparar los vértices factibles: $(0, 0)$, $(2000, 0)$, $(2000, 500)$, $(1000, 2000)$ y $(0, 3000)$. El punto $(1000, 2000)$ es la intersección del límite de capacidad con el presupuesto.

(x, y)	$(0, 0)$	$(2000, 0)$	$(2000, 500)$	$(1000, 2000)$	$(0, 3000)$
$B \text{ (€)}$	0	30000	35500	37000	33000

Comprar 1000 microondas del modelo caro y 2000 del otro; beneficio máximo: 37000 €.

Problema 3 · Ingreso de la tarifa plana

Sea x la reducción, en euros, respecto de la tarifa inicial de 36 €. Entonces la tarifa es $36 - x$ y se prevén $4800 + 150x$ contratos. Con $0 \leq x \leq 36$, el ingreso es

$$I(x) = (36 - x)(4800 + 150x) = 172800 + 600x - 150x^2.$$

Derivamos para buscar el máximo:

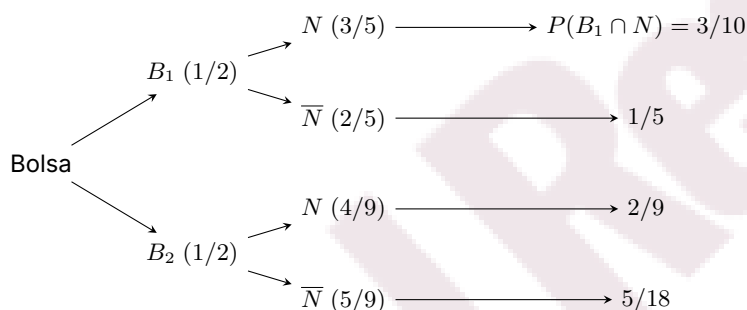
$$I'(x) = 600 - 300x = 0 \implies x = 2.$$

Como $I''(x) = -300 < 0$, la función es cóncava y ese punto crítico da el máximo. La tarifa es $36 - 2 = 34$ €, con $4800 + 150(2) = 5100$ contratos; el ingreso asciende a $34 \cdot 5100 = 173400$ €.

Tarifa: 34 €; contratos: 5100; ingreso máximo: 173400 €.

Problema 4 · Extracción de caramelos

Sean B_1, B_2 la elección de cada bolsa, y N el suceso «caramelo de naranja». Cada bolsa se elige con probabilidad $1/2$. En el árbol, las probabilidades de una ruta se multiplican; sumamos las dos rutas incompatibles que terminan en naranja:



Aplicando la probabilidad total, sumamos los dos caminos que terminan en naranja:

$$P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{45} = \frac{3}{10} + \frac{2}{9} = \frac{47}{90}.$$

Por tanto, $P(\bar{N}) = 1 - 47/90 = 43/90$. Para saber de qué bolsa procede un caramelo de limón usamos Bayes. La probabilidad conjunta de elegir la segunda bolsa y limón es $(1/2)(25/45) = 25/90$:

$$P(B_2 | \bar{N}) = \frac{P(B_2 \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{25/90}{43/90} = \frac{25}{43}.$$

$$P(\text{naranja}) = \frac{47}{90}, \quad P(\text{segunda bolsa} | \text{limón}) = \frac{25}{43}.$$