

Se desarrollan las dos opciones. En el examen debe contestarse una opción completa.

Opción A

A.1 - Árboles que sobreviven a la plaga

Sean n, l, p los números iniciales de naranjos, limoneros y perales. La finca tiene 58 árboles, y las dos relaciones del enunciado dan

$$\begin{cases} n + l + p = 58, \\ l + 2p = n + 6. \end{cases}$$

Tras la plaga quedan $n - 5$ naranjos y $p - 3$ perales. La igualdad indicada entre naranjos y el total de limoneros y perales supervivientes es

$$n - 5 = l + (p - 3) \implies n - l - p = 2.$$

Sumando esta ecuación a $n + l + p = 58$, obtenemos $2n = 60$, luego $n = 30$ y $l + p = 28$. La segunda relación inicial queda entonces

$$l + 2p = 36.$$

Al restarle $l + p = 28$, resulta $p = 8$. Después de la plaga sobreviven $8 - 3 = 5$ perales. **Conclusión.** Han sobrevivido 5 perales.

A.2 - Dominio, continuidad, derivabilidad y asíntotas

La función es

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ |x - 1|, & x > 0. \end{cases}$$

La exponencial está definida para todo real y el valor absoluto también; por tanto, $D_f = \mathbb{R}$.

Continuidad y derivabilidad. Cada tramo es continuo en su intervalo. En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x - 1| = 1,$$

por lo que la función es continua en 0. En $x = 1$, los dos límites de $|x - 1|$ y el valor $f(1)$ valen 0; también es continua ahí. Así, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Para estudiar la derivabilidad, derivamos por tramos:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

En $x = 0$, la derivada lateral izquierda vale 1 y la derecha -1 , por lo que no existe $f'(0)$. En $x = 1$, las derivadas laterales valen -1 y 1 , respectivamente; tampoco existe $f'(1)$. **Conclusión.** f es continua en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$.

Asíntotas. Al tender x a $-\infty$, $f(x) = e^x \rightarrow 0$, así que hay una asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda. Para $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = x - 1$; por tanto, comprobamos m y n para una oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - x) = -1.$$

No hay asíntotas verticales, pues la función es finita y continua en todo punto real. **Conclusión.** Las asíntotas son $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $y = x - 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$; no hay verticales.

A.2 c) Área entre la gráfica y el eje x

La función es no negativa en los tres tramos entre -2 y 2 , por lo que el área es la suma de las integrales:

$$A = \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx.$$

Evaluamos cada parte:

$$A = [e^x]_{-2}^0 + \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = (1 - e^{-2}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Conclusión. El área es $2 - e^{-2}$ unidades cuadradas.

A.3 - Trayectorias de los dos láseres

La primera recta, en forma paramétrica, es

$$r: \quad x = 1 + t, \quad y = -t, \quad z = -2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{u} = (1, -1, -2)$. El segundo rayo parte de $P = (-1, 0, 0)$ y llega a $Q = (0, 1, 0)$; su dirección se obtiene restando:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0).$$

a) Ángulo entre los láseres. El ángulo entre sus trayectorias se obtiene a partir de los vectores directores. Calculamos el producto escalar:

$$(1, -1, -2) \cdot (1, 1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Como las direcciones son perpendiculares, las trayectorias forman un ángulo recto. **Conclusión.** El ángulo entre los dos láseres es $\frac{\pi}{2}$ radianes.

b) Distancia de Q al plano. Escribimos el plano en forma general: $x + y - z + 2 = 0$. La distancia de un punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aquí $Q = (0, 1, 0)$, $(a, b, c, d) = (1, 1, -1, 2)$, así que

$$d(Q, \pi) = \frac{|0 + 1 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Conclusión. La distancia del punto de convergencia al plano es $\sqrt{3}$.

c) Plano paralelo. Un plano paralelo a π tiene el mismo vector normal $(1, 1, -1)$, así que su ecuación es $x + y - z + d = 0$. Al imponer que pase por $Q = (0, 1, 0)$, obtenemos $d = -1$. **Conclusión.** El plano paralelo que pasa por Q es $x + y - z - 1 = 0$.

A.4 - Probabilidades

Los datos son $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \mid B) = 0,25$.

a) Probabilidad condicionada inversa. Primero hallamos la intersección:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,1.$$

Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,1} = 1.$$

Conclusión. $P(B \mid A) = 1$.

b) Intersección y unión. La fórmula de la unión evita contar dos veces los casos de $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = 0,1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1 + 0,4 - 0,1 = 0,4.$$

Conclusión. $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,4$.

c) Suceso $\overline{A} \cup B$. Su complementario es $A \cap \overline{B}$. Como

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,1 - 0,1 = 0,$$

resulta

$$P(\overline{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \overline{B}) = 1.$$

Conclusión. $P(\overline{A} \cup B) = 1$.

Opción B

B.1 - Rango y operaciones con matrices

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos AA^T :

$$AA^T = \begin{pmatrix} a^2 + 4 + a^2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 + 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante vale

$$\det(AA^T) = (2a^2 + 4) \cdot 1 - 4 = 2a^2.$$

Si $a \neq 0$, el determinante es distinto de cero y el rango es 2. Si $a = 0$, la matriz es $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, que no es nula y tiene determinante cero, por lo que su rango es 1. **Conclusión.** $\text{rg}(AA^T) = 2$ si $a \neq 0$, y $\text{rg}(AA^T) = 1$ si $a = 0$.

b) Inversa para $a = 1$. En ese caso,

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(AA^T) = 2.$$

Como el determinante no es cero, existe la inversa:

$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La inversa pedida es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Sistema con $B = A^T A$, para $a = 1$. Sustituimos $a = 1$ en A y calculamos el producto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema $B(x, y, z)^T = (1, 0, 1)^T$ contiene dos ecuaciones distintas:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

Restando dos veces la primera ecuación de la segunda, obtenemos $y = -2$; la primera se reduce a $x + z = 5$. Por tanto, dejando $z = t$, **Conclusión.** Las soluciones son $(x, y, z) = (5 - t, -2, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

B.2 - Material de un envase rectangular

Sean x, y las longitudes, en decímetros, de los dos lados variables. El tercer lado mide 1 dm. Como 1 litro equivale a 1 dm³, el volumen de 4 litros impone

$$xy \cdot 1 = 4 \implies y = \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$

Para un paralelepípedo rectangular cerrado, la superficie total es la suma de las áreas de sus seis caras:

$$S = 2(xy + x + y).$$

Al utilizar $xy = 4$, expresamos el material en función de x :

$$S(x) = 2\left(4 + x + \frac{4}{x}\right) = 8 + 2x + \frac{8}{x}.$$

Buscamos el mínimo para $x > 0$:

$$S'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = 0 \implies x^2 = 4.$$

Como una longitud es positiva, $x = 2$; entonces $y = 4/2 = 2$. El criterio de segunda derivada confirma que es mínimo:

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} > 0 \quad (x > 0).$$

Conclusión. Las dimensiones óptimas son 1 dm, 2 dm y 2 dm. Se necesitan $S = 16$ dm² de material.

B.3 - Rectas y plano

La recta r tiene punto $R_0 = (2, -1, 3)$ y vector director $\vec{u} = (1, -2, 1)$. La recta s , tomando $x = 1$ y $z = 0$ en sus ecuaciones, pasa por $S_0 = (1, 0, 0)$; su vector director es $\vec{v} = (0, 1, 2)$. En forma paramétrica:

$$\begin{aligned} r: \quad x &= 2 + \lambda, \quad y = -1 - 2\lambda, \quad z = 3 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ s: \quad x &= 1, \quad y = \mu, \quad z = 2\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Posición relativa y ángulo. Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas se cortan, igualamos sus coordenadas. La coordenada x obliga a $\lambda = -1$, y la coordenada y da $\mu = 1$; la tercera coordenada también coincide: Sustituyendo $\lambda = -1$ en r , $z = 2$, y $\mu = 1$ en s , también $z = 2$. Por tanto, las rectas sí se cortan en $(1, 1, 2)$. El ángulo se calcula con el producto escalar de sus direcciones:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2, 1) \cdot (0, 1, 2) = -2 + 2 = 0.$$

Conclusión. r y s son secantes perpendiculares y forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

b) Intersección del plano generado con π . Un vector normal al plano que contiene a r y s es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, -2, 1) \times (0, 1, 2) = (-5, -2, 1).$$

Usamos el punto de intersección $H = (1, 1, 2)$:

$$-5(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0 \iff 5x + 2y - z - 5 = 0.$$

Para hallar su intersección con $\pi: x+z = -1$, resolvemos el sistema de ambos planos. Tomando $x = t$, resulta $z = -1 - t$ e $y = 2 - 3t$. La recta de intersección, en forma paramétrica, es

$$\ell: \quad x = t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La intersección de los planos es la recta ℓ anterior.

c) Proyección ortogonal de s sobre π . El plano π tiene normal $\vec{n} = (1, 0, 1)$, con $\|\vec{n}\|^2 = 2$. Proyectamos primero el punto $S_0 = (1, 0, 0)$ mediante

$$H_0 = S_0 - \frac{1+0+0+1}{2}(1, 0, 1) = (0, 0, -1).$$

La dirección de la proyección se obtiene proyectando $\vec{v} = (0, 1, 2)$ sobre el plano, es decir, restándole su componente normal:

$$\vec{v}_\pi = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (0, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 1).$$

Como $\vec{v}_\pi \neq \vec{0}$, la proyección es una recta. Su forma paramétrica es

$$s_\pi: \quad x = -t, \quad y = t, \quad z = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La proyección ortogonal de s sobre π es s_π .

B.4 - Distribuciones normal y binomial

Sea $X \sim N(10, 2)$, donde la media es 10 años y la desviación típica 2 años.

a) Duración de al menos 12 años. Estandarizamos $X = 12$:

$$P(X \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12 - 10}{2}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Conclusión. La probabilidad es 0,1587, es decir, un 15,87 %.

b) Tiempo para superar el 90 % de bombillas fundidas. Buscamos t tal que $P(X \leq t) > 0,90$. En la tabla normal, $\Phi(1,28) = 0,8997$, todavía menor que 0,90, mientras que $\Phi(1,29) = 0,9015$. Por tanto, usamos $z = 1,29$:

$$\frac{t - 10}{2} = 1,29 \implies t = 12,58.$$

Conclusión. Deben pasar aproximadamente 12,58 años para superar el 90 %.

c) Al menos dos bombillas fundidas después de 8 años. La probabilidad de que una bombilla se haya fundido antes de los 8 años es

$$p = P(X < 8) = P\left(Z < \frac{8 - 10}{2}\right) = P(Z < -1) = 1 - \Phi(1) = 0,1587.$$

Sea Y el número de bombillas fundidas entre las diez; entonces $Y \sim \text{Bin}(10, 0,1587)$. «Al menos dos» significa $Y \geq 2$, y conviene usar el complementario:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - (1 - p)^{10} - \binom{10}{1}p(1 - p)^9 \approx 0,4873.$$

Conclusión. La probabilidad de que se hayan fundido al menos dos bombillas es aproximadamente 0,4873.