

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2014 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Región factible y máximo

Las restricciones son

$$x \geq \frac{y}{2}, \quad 760x + 370y \leq 94500, \quad y + \frac{x}{2} \geq 100.$$

Las rectas frontera son $y = 2x$, $760x + 370y = 94500$ y $y = 100 - x/2$. Intersectándolas por parejas se obtienen los vértices:

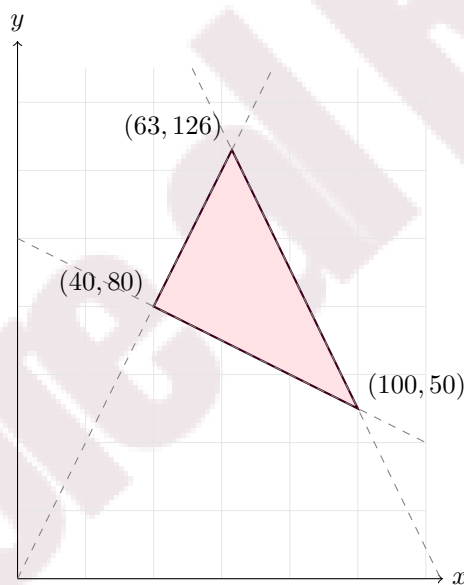
$$y = 2x, \quad y = 100 - \frac{x}{2} \implies (x, y) = (40, 80),$$

$$y = 2x, \quad 760x + 370y = 94500 \implies (x, y) = (63, 126),$$

$$y = 100 - \frac{x}{2}, \quad 760x + 370y = 94500 \implies (x, y) = (100, 50).$$

Los tres puntos cumplen las desigualdades, por lo que forman la región triangular factible. La representamos y evaluamos $f(x, y) = x + y$ en los vértices:

(x, y)	$(40, 80)$	$(63, 126)$	$(100, 50)$
$x + y$	120	189	150



$$f_{\max} = 189 \text{ en el punto } (63, 126).$$

Problema 2 · Evolución del valor de una acción

El dominio indicado es $[0, 8]$ y

$$f(x) = \begin{cases} -x + 15, & 0 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 8x + 26, & 3 < x \leq 6, \\ 2x + 2, & 6 < x \leq 8. \end{cases}$$

a) Cada tramo es polinómico y continuo; comprobamos los puntos de unión. En $x = 3$,

$$f(3) = 12, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 26 = 11.$$

Los límites laterales no coinciden, así que hay una discontinuidad de salto en $x = 3$. En $x = 6$,

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 36 - 48 + 26 = 14 = f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x),$$

por lo que es continua en $x = 6$.

b) En el primer tramo la función decrece desde $f(0) = 15$ hasta $f(3) = 12$. En el segundo, $x^2 - 8x + 26 = (x-4)^2 + 10$, que alcanza su mínimo 10 en $x = 4$; en $x = 6$ vale 14. El tercer tramo crece desde valores próximos a 14 hasta $f(8) = 18$. Por tanto, en toda la sesión el mínimo absoluto es 10 euros y el máximo absoluto es 18 euros.

c) Para maximizar el beneficio comprando una acción y vendiéndola después, conviene comprar cuando su valor es mínimo, a las 4 horas, y vender cuando alcanza su máximo, a las 8 horas. El beneficio por acción sería

$$18 - 10 = 8 \text{ €}.$$

$\min f = 10 \text{ € en } x = 4,$	$\max f = 18 \text{ € en } x = 8,$	beneficio máximo = 8 € por acción.
------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

Problema 3 · Probabilidad de una pieza defectuosa

Las tres máquinas producen $1000 + 3000 + 4000 = 8000$ piezas. Denotamos por D el suceso «la pieza es defectuosa» y por M_i que procede de la máquina i . Las probabilidades de producción son $1/8$, $3/8$ y $1/2$.

a) Sumamos las probabilidades de defecto de cada máquina, ponderadas por su proporción de producción:

$$P(D) = \frac{1}{8}(0,02) + \frac{3}{8}(0,015) + \frac{1}{2}(0,005) = \frac{85}{8000} = \frac{17}{1600}.$$

b) De la máquina más antigua salen $1000 \cdot 0,02 = 20$ piezas defectuosas. En total hay 85 defectuosas, así que

$$P(M_1 | D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{20}{85} = \frac{4}{17}.$$

c) No ser defectuosa ocurre en $8000 - 85 = 7915$ piezas. Las dos primeras máquinas aportan $980 + 2955 = 3935$ piezas no defectuosas. Por tanto,

$$P(\overline{M}_3 | \overline{D}) = \frac{3935}{7915} = \frac{787}{1583}.$$

$P(D) = \frac{17}{1600},$	$P(M_1 D) = \frac{4}{17},$	$P(\overline{M}_3 \overline{D}) = \frac{787}{1583}.$
---------------------------	------------------------------	--

Opción B

Problema 1 · Precios originales

Sea r el precio original del rotulador. El cuaderno cuesta $r/2$ y la carpeta cuesta $r/2 + 0,2r = 0,7r$. Tras el descuento del 10%, se paga el 90% del precio original:

$$0,9 \left(r + \frac{r}{2} + 0,7r \right) = 3,96 \implies 1,98r = 3,96 \implies r = 2.$$

Así, el cuaderno cuesta 1 euro y la carpeta $0,7 \cdot 2 = 1,40$ euros.

Rotulador: 2 €; cuaderno: 1 €; carpeta: 1,40 €.

Problema 2 · Extremos e integral de una función

La función es $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$, un polinomio, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Sus ceros son $x = 1$ y $x = -2$; además, $f(0) = 4$. Los cortes son $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 4)$.

Para estudiar la monotonía derivamos usando $g(x) = (x-1)(x+2)$ y $f = g^2$:

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1).$$

Los puntos críticos son $x = -2, -1/2, 1$. El signo de la derivada es negativo en $(-\infty, -2)$, positivo en $(-2, -1/2)$, negativo en $(-1/2, 1)$ y positivo en $(1, +\infty)$. Por ello, la función decrece en los dos primeros intervalos de signo negativo y crece en los de signo positivo.

El cambio de signo muestra mínimos locales en $x = -2$ y $x = 1$, ambos de valor 0, y un máximo local en $x = -1/2$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{16}.$$

Para la integral expandimos el integrando y aplicamos la regla de la potencia:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-1}^1 = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

Mínimos: $(-2, 0)$, $(1, 0)$; máximo local: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16}\right)$; $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{32}{5}$.

Problema 3 · Especialidades de los trabajadores

Sean I y E los sucesos «ser técnico informático» y «ser técnico electrónico». Se conocen $P(I) = 0,3$, $P(E) = 0,2$ y $P(I \cap E) = 0,1$.

a) Por la fórmula de la unión,

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4.$$

b) Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(I | E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}.$$

c) Tener solo una especialidad incluye los casos «informático, pero no electrónico» y «electrónico, pero no informático». Son incompatibles, por lo que sumamos:

$$P(\text{solo una}) = (0,3 - 0,1) + (0,2 - 0,1) = 0,3.$$

$P(I \cup E) = 0,4$, $P(I | E) = \frac{1}{2}$, $P(\text{solo una especialidad}) = 0,3$.