Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2010--2011 · Modelo 4

Resolución original de las dos opciones, con los resultados interpretados en el contexto del enunciado.

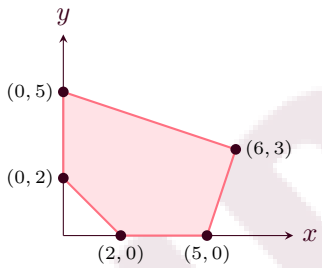
Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

El recinto está limitado por $x+y\geq 2$, $x+3y\leq 15$, $3x-y\leq 15$ y los ejes coordenados, es decir, $x,y\geq 0$. Intersectamos las rectas frontera y conservamos los puntos que satisfacen las restricciones. Los cortes con los ejes y la intersección de las dos rectas oblicuas son

$$(0,2),\quad (0,5),\quad (2,0),\quad (5,0),\qquad \begin{cases} x+3y=15,\\ 3x-y=15 \end{cases}\Longrightarrow (6,3).$$

El recinto es el pentágono de vértices $(0,2),(2,0),(5,0),(6,3),(0,5)$:



Como $F(x,y)=3x+y$ es lineal, evaluamos en todos los vértices:

(x,y)	$(0,2)$	$(2,0)$	$(5,0)$	$(6,3)$	$(0,5)$
$F(x,y)$	2	6	15	21	5

El mínimo es 2 y el máximo 21. Como 30 supera el máximo posible en el recinto, no existe ningún punto factible con $F(x,y)=30$.

$$\boxed{F_{\text{min}}=2 \text{ en } (0,2);\quad F_{\text{max}}=21 \text{ en } (6,3);\quad F(x,y)=30 \text{ no es posible.}}$$

Ejercicio 2 · Dominio, cortes, asíntotas y estudio de una función

a) En $f(x)=4x/(2x+1)$, el denominador debe ser distinto de cero, luego el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$. El corte con el eje X se obtiene imponiendo $f(x)=0$, lo que exige que el numerador sea cero: $x=0$. El corte con el eje Y también corresponde a $x=0$, así que ambos ejes se cortan en $(0,0)$.

En $x=-1/2$, el denominador se anula y el numerador no; de hecho, el límite de la función es infinito en valor absoluto, por lo que hay una asíntota vertical. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, el cociente de los coeficientes principales da la horizontal:

$$\lim_{x\to -1/2^-} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to -1/2^+} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{2x+1}=2.$$

b) Para $g(x)=x^3+3x^2+3x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ por ser polinómica, derivamos para estudiar la monotonía:

$$g'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0.$$

La función es creciente en toda la recta (la derivada solo se anula en $x=-1$ y no cambia de signo), así que no tiene extremos relativos. La curvatura se obtiene con la segunda derivada:

$$g''(x)=6(x+1).$$

Es cóncava hacia abajo si $x<-1$ y hacia arriba si $x>-1$; como cambia la concavidad en $x=-1$ y $g(-1)=-1$, hay un punto de inflexión $(-1,-1)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\tfrac{1}{2}\};\quad (0,0) \text{ es el corte con ambos ejes;}\\ x=-\tfrac{1}{2} \text{ vertical};\quad y=2 \text{ horizontal;}\\ g \text{ crece en } \mathbb{R},\ \text{sin extremos, e inflexiona en } (-1,-1).\end{array}}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Sean I «hay un incidente» y A «suena la alarma». Se conoce $P(I) = 0{,}1$, $P(A \mid I) = 0{,}95$ y $P(A \mid I^c) = 0{,}03$. La probabilidad de alarma suma los dos casos incompatibles (incidente y ausencia de incidente):

$$P(A) = P(I)P(A \mid I) + P(I^c)P(A \mid I^c) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122.$$

Para hallar la probabilidad de que no hubiese incidente sabiendo que sonó la alarma, invertimos la condición mediante Bayes:

$$P(I^c \mid A) = \frac{P(I^c)P(A \mid I^c)}{P(A)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122} \approx 0{,}2213.$$

$$\boxed{P(A) = 0{,}122; \qquad P(I^c \mid A) = \frac{27}{122} \approx 0{,}2213.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para la media

La hipótesis que se desea comprobar es que la vida media no supera 70 años. Por ello, planteamos un contraste unilateral a la derecha:

$$H_0 : \mu \leq 70, \qquad H_1 : \mu > 70.$$

Se conoce $\sigma = 8{,}9$, la muestra tiene $n = 100$ y su media es $71{,}8$. Para el valor frontera $\mu_0 = 70$,

$$Z = \frac{\overline{X} - 70}{8{,}9/\sqrt{100}}, \qquad z_{\text{obs}} = \frac{71{,}8 - 70}{0{,}89} \approx 2{,}022.$$

Al nivel $\alpha = 0{,}05$, el valor crítico es $z_{0{,}95} \approx 1{,}645$, de modo que se rechaza H_0 si $Z > 1{,}645$, o equivalentemente si

$$\overline{X} > 70 + 1{,}645\frac{8{,}9}{10} = 71{,}4645.$$

La media muestral $71{,}8$ supera ese umbral y $2{,}022 > 1{,}645$; rechazamos H_0. Hay evidencia estadística, al 5%, de que la vida media supera los 70 años.

$$\boxed{\text{Se rechaza } H_0 \text{ al } 5\%;\ \text{la muestra apoya que } \mu > 70 \text{ años.}}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Productos matriciales y ecuación matricial

La matriz A es 2×3 y B es 2×2. Por las dimensiones, AA^T, A^TA y AB están definidos; los calculamos por separado:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación es $AA^TX = B$. Como $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible, despejamos $X = (AA^T)^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y asíntotas

La función está definida por $x^2 - 3x + 4$ si $x \leq 2$, y por $4 - a/x$ si $x > 2$. Solo hay que ajustar la continuidad en el punto de unión $x = 2$. Igualamos el valor por la izquierda con el límite por la derecha:

$$2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 4 - \frac{a}{2} \Longrightarrow 2 = 4 - \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 4.$$

Para este valor, las derivadas laterales también coinciden:

$$f'_-(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1, \qquad f'_+(2) = \left(\frac{a}{x^2}\right)_{x=2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Así, la función es continua y derivable en $x = 2$ cuando $a = 4$.

Si $a = 1$, la rama racional solo se usa para $x > 2$, por lo que su denominador no se anula en el dominio: no hay asíntota vertical. Al tender x a $+\infty$, $4 - 1/x \to 4$, y existe la horizontal $y = 4$. En cambio, para $x \to -\infty$ rige la rama polinómica, que no tiene límite finito.

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 4 \text{ para continuidad y derivabilidad en } x = 2; \\ \text{si } a = 1, \text{ no hay vertical y } y = 4 \text{ es horizontal cuando } x \to +\infty. \end{array}}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada e independencia

Se conocen $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculamos las probabilidades pedidas:

$$P(A \cap B) = 0{,}2, \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4,$$

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}6} = 0{,}5.$$

No son incompatibles porque su intersección tiene probabilidad $0{,}2 > 0$. Sí son independientes, ya que $P(A)P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 = P(A \cap B)$.

$$\boxed{P(A \cap B) = 0{,}2; \quad P(A \mid B) = 0{,}4; \quad P(B \mid A^c) = 0{,}5; \quad A, B \text{ no son incompatibles y sí son independientes.}}$$

Ejercicio 4 · Distribución de la media muestral

La población es normal con media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 4$. Para muestras de tamaño $n = 16$, la media muestral sigue una normal de media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$:

$$\overline{X} \sim N\left(50, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50, 1).$$

Por tanto, tipificamos los extremos 47,5 y 52,5 usando error típico 1:

$$P(47{,}5 \le \overline{X} \le 52{,}5) = P(-2{,}5 \le Z \le 2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}9876.$$

$$\boxed{\overline{X} \sim N(50, 1); \qquad P(47{,}5 \le \overline{X} \le 52{,}5) \approx 0{,}9876.}$$