

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2022

Se desarrollan las ocho preguntas. En la prueba basta con contestar a cuatro.

Pregunta A.1 - Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A es cuadrada, empezamos por calcular su determinante:

$$\det A = (m+1)(2m-1).$$

Si $m \neq -1, \frac{1}{2}$, el determinante es distinto de cero; por tanto, $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado (SCD).

Cuando $m = -1$, la matriz ampliada queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Sumando la primera fila a la segunda y restándola de la tercera, se obtienen dos filas no nulas proporcionales; así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es compatible indeterminado (SCI). Las ecuaciones independientes dan $y = 0$ y $x + z = 1$.

Para $m = \frac{1}{2}$, la primera y la tercera filas de A^* coinciden, y la segunda es independiente. Por ello, también $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: es SCI. La resolución de este caso se desarrolla en el apartado b). **Conclusión.** El sistema es SCD si $m \neq -1, \frac{1}{2}$, y SCI para $m = -1$ y $m = \frac{1}{2}$; no hay valores de m que lo hagan incompatible.

b) Solución para $m = \frac{1}{2}$

Con $m = \frac{1}{2}$, las ecuaciones independientes se pueden escribir como

$$x - y + z = 1, \quad 5y - 3z = -3.$$

Tomamos $z = t$. Entonces

$$y = \frac{3t-3}{5}, \quad x = 1 + y - t = \frac{2-2t}{5}.$$

Conclusión. Las soluciones son $(x, y, z) = \left(\frac{2-2t}{5}, \frac{3t-3}{5}, t\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Pregunta A.2 - Continuidad, derivabilidad, simetría e integral

La función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$.

a) Continuidad y derivabilidad en 0

Para estudiar la continuidad, usamos que $0 < e^{-1/x^2} \leq 1$ si $x \neq 0$. Entonces

$$|f(x) - f(0)| = |x|^3 e^{-1/x^2} \leq |x|^3 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, y la función es continua en 0.

La derivada en 0 se define como el límite del cociente incremental:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 e^{-1/h^2} = 0.$$

Así, f también es derivable en 0, con derivada nula. **Conclusión.** f es continua y derivable en $x = 0$, y $f'(0) = 0$.

b) Simetría

Para $x \neq 0$,

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x).$$

La igualdad también se cumple en $x = 0$, donde ambos lados valen cero. **Conclusión.** f es impar.

c) Integral

En el integrando simplificamos primero:

$$\frac{f(x)}{x^6} = \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

Como

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-1/x^2} \right) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2},$$

la primitiva del integrando es $\frac{1}{2} e^{-1/x^2}$. Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \frac{1}{2} \left[e^{-1/x^2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(e^{-1/4} - e^{-1} \right).$$

Conclusión. La integral vale $\frac{e^{-1/4} - e^{-1}}{2}$.

Pregunta A.3 - Recta de la partícula

Tomamos $x = t$ en las ecuaciones de r . Entonces $y = 2t - 10$ y $z = t + 90$, de modo que la recta queda en forma paramétrica:

$$r: \quad x = t, \quad y = 2t - 10, \quad z = t + 90, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{d} = (1, 2, 1)$.

a) Dirección y corte con $z = 0$

La dirección se obtiene al variar el parámetro, por lo que un vector director es $(1, 2, 1)$. Para hallar la posición en el plano $z = 0$, imponemos $t + 90 = 0$, es decir, $t = -90$. **Conclusión.** La partícula llega al plano $z = 0$ en $(-90, -190, 0)$.

b) Posición más próxima al láser

Un punto genérico de la trayectoria es $X(t) = (t, 2t - 10, t + 90)$. El punto más próximo al dispositivo $P = (1, 1, 1)$ es aquel para el que $X(t) - P$ es perpendicular al vector director:

$$X(t) - P = (t - 1, 2t - 11, t + 89).$$

Imponemos producto escalar nulo:

$$(t - 1, 2t - 11, t + 89) \cdot (1, 2, 1) = t - 1 + 4t - 22 + t + 89 = 6t + 66 = 0,$$

de donde $t = -11$. La posición correspondiente es

$$H = X(-11) = (-11, -32, 79).$$

Conclusión. La partícula está más cerca del láser en $H = (-11, -32, 79)$.

c) Ángulo entre la recta y el plano

El plano $x + y = 2$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 1, 0)$. El ángulo α entre una recta y un plano es complementario al ángulo entre el vector director de la recta y el normal; por ello,

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|} = \frac{|1 + 2|}{\sqrt{6} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Así, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **Conclusión.** El ángulo entre r y el plano es $\frac{\pi}{3}$.

Pregunta A.4 - Distribución binomial

Sea X el número de mujeres entre los diez consejeros. Cada consejero es mujer con probabilidad $p = 0,277$, y las selecciones se modelizan como ensayos independientes; por tanto, $X \sim \text{Bin}(10, 0,277)$.

a) Exactamente cinco mujeres

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} (0,277)^5 (0,723)^5 \approx 0,0812.$$

Conclusión. La probabilidad de que la mitad sean mujeres es aproximadamente 0,0812.

b) Al menos un hombre

El suceso complementario es que los diez consejeros sean mujeres:

$$P(\text{al menos un hombre}) = 1 - (0,277)^{10} \approx 0,9999973.$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,9999973.

c) Al menos un 35 % de mujeres entre 200 consejeros

Sea $Y \sim \text{Bin}(200, 0,277)$. «Como mínimo un 35 %» corresponde a $Y \geq 70$. Aproximamos por una normal con

$$\mu = np = 55,4, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,277 \cdot 0,723} \approx 6,329.$$

Con corrección de continuidad,

$$P(Y \geq 70) \simeq P(N \geq 69,5), \quad N \sim N(55,4, 6,329).$$

Al tipificar,

$$z = \frac{69,5 - 55,4}{6,329} \approx 2,23, \quad P(N \geq 69,5) \approx 1 - \Phi(2,23) = 1 - 0,9871 = 0,0129.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada es 0,0129, es decir, un 1,29 %.

Pregunta B.1 - Reparto de un premio

Sean p, a, l las edades de Pablo, Alejandro y Alicia, respectivamente. La suma de las edades y la relación indicada conducen al sistema

$$\begin{cases} p + a + l = 45, \\ p + a = 2l + 3. \end{cases}$$

Sustituyendo $p + a = 45 - l$ en la segunda ecuación, $45 - l = 2l + 3$, de donde $l = 14$ y $p + a = 31$.

El premio se reparte en proporción directa a las edades. La constante de proporcionalidad es

$$k = \frac{9450}{45} = 210 \text{ euros por año.}$$

Pablo recibe 420 euros más que Alicia, así que

$$210p - 210l = 420 \implies p - l = 2 \implies p = 16.$$

Por tanto, $a = 31 - 16 = 15$. Las cantidades recibidas son

$$210 \cdot 16 = 3360, \quad 210 \cdot 15 = 3150, \quad 210 \cdot 14 = 2940.$$

Conclusión. Pablo tiene 16 años y recibe 3360 €; Alejandro tiene 15 años y recibe 3150 €; Alicia tiene 14 años y recibe 2940 €.

Pregunta B.2 - Teorema de Bolzano, extremos y área

La función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}$, ya que $x^2 + 1 > 0$ para todo real.

a) Teorema de Bolzano en $[-1, 1]$

La función es continua en $[-1, 1]$. Además,

$$f(-1) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(1) = \frac{1}{2} > 0.$$

Como cambia de signo entre los extremos, por el teorema de Bolzano existe al menos un cero en $(-1, 1)$; de hecho, $f(0) = 0$. **Conclusión.** Se cumplen las hipótesis de Bolzano y f se anula en $x = 0$.

b) Extremos relativos

Derivamos para localizar los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

El denominador siempre es positivo y $f'(x) = 0$ para $x = \pm 1$. La derivada es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, 1)$ y negativa en $(1, \infty)$. Por tanto, f pasa de decrecer a crecer en $x = -1$, y de crecer a decrecer en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. Hay un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$.

c) Área entre la gráfica y el eje OX

La función es impar y corta el eje OX en $x = 0$. En $[-1, 0]$ está bajo el eje y en $[0, 1]$ por encima, así que el área geométrica es

$$A = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

Con el cambio $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^2 = \ln 2.$$

Conclusión. El área es $\ln 2$ unidades cuadradas.

Pregunta B.3 - Rectas en un plano

El plano $\pi : x + y + z = 1$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$. La recta r_1 ya está en forma paramétrica:

$$r_1 : \quad x = 1 + \lambda, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = -1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Pertenencia al plano

En cualquier punto de r_1 ,

$$x + y + z = (1 + \lambda) + (1 - \lambda) - 1 = 1,$$

de modo que $r_1 \subset \pi$. Para $P = (0, 1, 0)$, también $0 + 1 + 0 = 1$, así que $P \in \pi$. **Conclusión.** r_1 está contenido en π y P pertenece a π .

b) Recta por P perpendicular a r_1 dentro de π

La dirección buscada debe ser perpendicular al vector director $\vec{u} = (1, -1, 0)$ de r_1 y al normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$ del plano. El producto vectorial $\vec{n} \times \vec{u} = (1, 1, -2)$ cumple ambas condiciones. La recta que pasa por $P = (0, 1, 0)$ con esa dirección es

$$s : \quad x = t, \quad y = 1 + t, \quad z = -2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. s es una recta contenida en π , pasa por P y es perpendicular a r_1 .

c) Paralela a r_1 y área del cuadrado

La recta por P paralela a r_1 , en forma paramétrica, es

$$r_2 : \quad x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que dos lados de un cuadrado estén sobre r_1 y r_2 , su lado es la distancia entre esas rectas paralelas. Tomamos $R_0 = (1, 1, -1) \in r_1$, $P = (0, 1, 0) \in r_2$, y $\vec{u} = (1, -1, 0)$. La distancia entre rectas paralelas se calcula mediante

$$d(r_1, r_2) = \frac{\|(P - R_0) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Aquí $P - R_0 = (-1, 0, 1)$, y

$$(P - R_0) \times \vec{u} = (1, 1, 1), \quad d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

El área del cuadrado es el lado al cuadrado:

$$A = d(r_1, r_2)^2 = \frac{3}{2}.$$

Conclusión. El área del cuadrado es $\frac{3}{2}$ unidades cuadradas.

Pregunta B.4 - Probabilidades con extracción sucesiva

Definimos W : «el sombrero es blanco», N : «el sombrero es negro» y C : «el pañuelo es de cuadros». Las probabilidades de primera etapa son

$$P(W) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad P(N) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Las probabilidades de pañuelo en cada rama, y las probabilidades conjuntas de los caminos, quedan resumidas en la tabla. En cada camino multiplicamos las probabilidades de sus ramas; para unir caminos incompatibles sumamos:

	pañuelo blanco	pañuelo negro	pañuelo de cuadros
sombrero blanco	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$
sombrero negro	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{15}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$

a) El pañuelo muestra un color distinto al del sombrero

Si el sombrero es blanco, sirven los pañuelos negros y de cuadros; si es negro, sirven los blancos y de cuadros. Sumamos las probabilidades de esos caminos:

$$P(\text{color distinto}) = \frac{4}{27} + \frac{10}{27} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{97}{135}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{97}{135}$.

b) Aparece el color negro en al menos uno de los dos objetos

El único caso en que no aparece negro es que tanto el sombrero como el pañuelo sean blancos; su probabilidad es $\frac{4}{27}$. Usamos el complementario:

$$P(\text{aparece negro al menos una vez}) = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}.$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{23}{27}$.

c) Sombrero negro sabiendo que el pañuelo es de cuadros

Aplicamos Bayes: dividimos la probabilidad del camino «sombrero negro y pañuelo de cuadros» por la probabilidad total de un pañuelo de cuadros:

$$P(N | C) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{10}{27} + \frac{2}{15}} = \frac{\frac{18}{135}}{\frac{68}{135}} = \frac{9}{34}.$$

Conclusión. La probabilidad de que el sombrero sea negro, dado que el pañuelo es de cuadros, es $\frac{9}{34}$.