

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Llamamos x a la longitud del lado paralelo al camino y y a la anchura perpendicular a este. Solo se valla un lado paralelo al camino, que cuesta 80 euros por metro; los otros tres cuestan 10 euros por metro. La restricción del presupuesto es

$$80x + 10(x + 2y) = 28800 \iff 90x + 20y = 28800.$$

Despejamos $y = 1440 - \frac{9}{2}x$. El área que queremos maximizar queda

$$A(x) = xy = x \left(1440 - \frac{9}{2}x \right) = 1440x - \frac{9}{2}x^2.$$

Las dimensiones deben ser positivas, de modo que $0 < x < 320$. Derivamos para hallar el punto crítico:

$$A'(x) = 1440 - 9x = 0 \implies x = 160 \text{ m}, \quad y = 1440 - \frac{9}{2}(160) = 720 \text{ m}.$$

Como $A''(x) = -9 < 0$, se trata de un máximo. La longitud paralela al camino es x y la anchura perpendicular es y ; por tanto,

$$x = 160 \text{ m junto al camino}, \quad y = 720 \text{ m de anchura}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Usamos el cambio sugerido $t = \sqrt{x+2}$, así que $x = t^2 - 2$ y $dx = 2t dt$. El denominador se convierte en $(t^2 - 4)t$, por lo que

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2}{t^2 - 4} dt.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2 - 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right).$$

Integramos y volvemos a la variable original:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right| + C.$$

La expresión vale en los intervalos del dominio $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Opción A - Ejercicio 3

Multiplicamos la igualdad $AXA^{-1} + B = CA^{-1}$ por A a la derecha. El producto $A^{-1}A$ se simplifica y, como se conoce BA , queda

$$AX + BA = C \implies AX = C - BA.$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa:

$$\det A = -1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restamos las matrices dadas y después multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$C - BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}(C - BA) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Tomamos la recta en forma paramétrica. Si $y = t$, entonces $z = t + 2$ y $x = (t + 5)/2$. Podemos usar el punto $R_0 = (5/2, 0, 2)$ y el vector director $\vec{v} = (1, 2, 2)$.

a) El plano perpendicular a r debe tener como vector normal un vector director de r . Con el punto $P = (-3, 1, 6)$, su ecuación es

$$(x + 3) + 2(y - 1) + 2(z - 6) = 0 \implies \boxed{x + 2y + 2z - 11 = 0}.$$

b) Para reflejar un punto respecto de una recta, primero hallamos su proyección ortogonal H sobre ella. Si $H = R_0 + t\vec{v}$, la condición $\overrightarrow{R_0H}$ proyectada sobre $\vec{v}$ da

$$t = \frac{(P - R_0) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(-11/2, 1, 4) \cdot (1, 2, 2)}{9} = \frac{1}{2}.$$

Así, $H = R_0 + \frac{1}{2}\vec{v} = (3, 1, 3)$. El simétrico es $P' = 2H - P$, por lo que

$$\boxed{P' = (9, 1, 0)}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para que la función sea derivable en $x = 0$, primero debe ser continua. Igualamos los límites laterales y el valor en ese punto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a, \quad f(0) = b \implies b = a.$$

Como $b > 0$, también $a > 0$. Ahora igualamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = 2, \quad f'_+(0) = a^2 - b.$$

Con $b = a$, la condición de derivabilidad es $a^2 - a = 2$, es decir, $(a - 2)(a + 1) = 0$. La positividad de a descarta -1 , así que

$$a = 2, \quad b = 2.$$

Opción B - Ejercicio 2

Como $a > 1$, la región queda entre los puntos de corte $x = 1$ (donde $\ln x = 0$) y $x = a$. En ese intervalo $\ln x \geq 0$, así que el área es

$$\mathcal{A} = \int_1^a \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^a = a \ln a - a + 1.$$

Imponemos que el área sea 1:

$$a \ln a - a + 1 = 1 \implies a(\ln a - 1) = 0.$$

Como $a > 1$, no puede ser cero, por lo que $\ln a = 1$ y

$$a = e.$$

Opción B - Ejercicio 3

El sistema es homogéneo, así que siempre es compatible. La matriz de coeficientes es

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A_\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Si $\lambda \neq 0, 2$, el determinante es distinto de cero y $\text{rg}(A_\lambda) = 3$; el sistema es compatible determinado y su única solución es $(0, 0, 0)$.

Para $\lambda = 0$, la matriz tiene rango 2: el menor de las dos últimas filas y columnas segunda y tercera vale $-2 \neq 0$. El sistema es compatible indeterminado; de las ecuaciones $y + z = 0$ y $2y + z = 0$ obtenemos $y = z = 0$, mientras que x es libre. Sus soluciones son $(t, 0, 0)$.

Para $\lambda = 2$, las dos primeras ecuaciones coinciden y, junto con la tercera, dan $x + y + z = 0$ y $x + y = 0$. El rango vuelve a ser $2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado y

$$(x, y, z) = (-t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Restando la tercera ecuación a la segunda se obtiene $z = 0$, cualquiera que sea λ . Por tanto, no existe ningún valor de λ para el que el sistema tenga una solución con $z \neq 0$.

Opción B - Ejercicio 4

La recta r tiene ecuaciones $2x + y = 0$ y $z = 0$. Tomando $x = t$, la escribimos en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sean $A = (0, 1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$; entonces $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2)$. Un punto genérico de r es $C_t = (t, -2t, 0)$.

a) Para que el ángulo en A sea recto, imponemos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC_t}$ sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{AC_t} = C_t - A = (t, -2t - 1, -1), \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC_t} = 2t - 2 = 0.$$

Así, $t = 1$ y el punto es $C = (1, -2, 0)$.

b) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados con origen en A :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_t} = (4t + 2, 2t + 2, -4t - 2).$$

Imponemos que el área sea $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(4t + 2)^2 + (2t + 2)^2 + (-4t - 2)^2} = \sqrt{2} \iff 9t^2 + 10t + 1 = 0.$$

Factorizando, $(9t + 1)(t + 1) = 0$, así que $t = -1$ o $t = -\frac{1}{9}$. Los puntos son

$$D_1 = (-1, 2, 0), \quad D_2 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, 0\right).$$