

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2006

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Integral definida

Factorizamos el denominador para descomponer la fracción en términos cuya primitiva conocemos:

$$\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right).$$

Por tanto,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2} [\ln|x| - \ln|x+2|]_1^2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Conclusión. La integral vale $\frac{1}{2} \ln(3/2)$.

Opción A - Ejercicio 2. Continuidad y derivabilidad de una función a trozos

a) Cada expresión es continua en su intervalo; solo hay que imponer la igualdad de límites y del valor de la función en los puntos de unión 0 y π . En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = 2, \quad f(0) = 2a,$$

por lo que $a = 1$. En $x = \pi$:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2a \cos x) = \pi^2 - 2, \quad f(\pi) = a\pi^2 + b = \pi^2 + b.$$

La continuidad exige $b = -2$. **Conclusión.** La función es continua en $\mathbb{R}$ para $a = 1$ y $b = -2$.

b) Con estos valores,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 0, \\ x^2 + 2 \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ x^2 - 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

En cada intervalo abierto la función es derivable. En $x = 0$ comparamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = 3, \quad f'_+(0) = (2x - 2 \sin x)_{x=0} = 0.$$

No coinciden, así que no es derivable en 0. En $x = \pi$:

$$f'_-(\pi) = 2\pi - 2 \sin \pi = 2\pi, \quad f'_+(\pi) = 2\pi,$$

por tanto sí es derivable en π . **Conclusión.** f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero no en $x = 0$.

Opción A - Ejercicio 3. Propiedades del determinante

a) Para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad \det A = -1, \quad \det I = 1.$$

Así, $\det(A^2) = \det I = 1 = (-1)^2 = (\det A)^2$. Además,

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(A + I) = -8 + 8 = 0 = \det A + \det I.$$

Conclusión. Las dos igualdades se verifican para las matrices dadas.

b) Para cualquier matriz cuadrada M , el determinante del producto cumple $\det(MM) = \det(M) \det(M)$. Como $M^2 = MM$,

$$\det(M^2) = (\det M)^2.$$

Conclusión. Sí, la igualdad se cumple para toda matriz cuadrada M .

c) Sea $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Desarrollamos los dos determinantes:

$$\det(M + I) = (p+1)(s+1) - qr = ps - qr + p + s + 1, \quad \det(M) + \det(I) = ps - qr + 1.$$

La igualdad pedida equivale a $p + s = 0$. No impone condiciones sobre q ni sobre r . **Conclusión.** Las matrices buscadas son $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$, con $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 4. Lugares geométricos y una recta

Sean $A = (0, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

a) Los puntos equidistantes de A y B forman el plano mediador del segmento AB . Igualamos las distancias al cuadrado, lo que evita raíces:

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2.$$

Al simplificar queda

$$x - y + z = \frac{1}{2}.$$

b) La distancia entre A y B es

$$|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

Los puntos cuya distancia a A es $|AB|$ forman una esfera de centro A y radio $\sqrt{3}$:

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3.$$

c) El vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 1)$. Para que el ángulo en A sea recto, los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ han de ser perpendiculares. Si $C = (x, y, z)$ pertenece al plano dado, se cumplen

$$x + y + z = 3, \quad (x, y-1, z) \cdot (1, -1, 1) = 0,$$

siendo la segunda ecuación equivalente a $x - y + z = -1$. Restando las ecuaciones se obtiene $y = 2$; entonces $x + z = 1$. La recta, en forma paramétrica, es

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta de los vértices C buscados queda expresada en forma paramétrica.

Opción B - Ejercicio 1. Sistema lineal con infinitas soluciones

El sistema tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que, si es compatible, tendrá al menos una variable libre. Tomamos $z = t$ y despejamos las otras incógnitas:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 2x + 3y - z = 5. \end{cases}$$

De la primera, $x + y = 3t$. Restando esta igualdad, duplicada, de la segunda se obtiene $y + 5t = 5$, es decir, $y = 5 - 5t$. Entonces $x = -5 + 8t$:

$$(x, y, z) = (-5 + 8t, 5 - 5t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para imponer $x + y + z = 4$,

$$(-5 + 8t) + (5 - 5t) + t = 4 \implies 4t = 4 \implies t = 1.$$

Conclusión. La solución cuya suma de componentes es 4 es $(x, y, z) = (3, 0, 1)$.

Opción B - Ejercicio 2. Matrices idempotentes

Sea $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. La condición $A^2 = A$ significa que A es idempotente. Calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas se obtiene $a^2 = a$, $b^2 = b$ y $a^2 + ab = a$. De las dos primeras, $a, b \in \{0, 1\}$. Si $a = 0$, la última igualdad ya se cumple y, al excluir la matriz nula, queda $b = 1$. Si $a = 1$, la última igualdad obliga a $b = 0$. Por tanto,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A_i^2 = A_i$, todas las potencias positivas también son iguales a A_i . Así,

$$A_i + A_i^2 + \dots + A_i^{10} = 10A_i.$$

Conclusión. Las matrices pedidas son A_1, A_2 ; las sumas correspondientes son $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 3. Estudio y área de $f(x) = xe^{2x}$

a) Tanto x como la exponencial están definidos para cualquier real, así que $D_f = \mathbb{R}$. Derivamos para estudiar el crecimiento:

$$f'(x) = e^{2x}(1 + 2x).$$

Como $e^{2x} > 0$, el único punto crítico es $x = -\frac{1}{2}$. La derivada es negativa antes de ese valor y positiva después; por tanto, la función decrece en $(-\infty, -1/2)$ y crece en $(-1/2, \infty)$. Tiene un mínimo relativo y absoluto:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

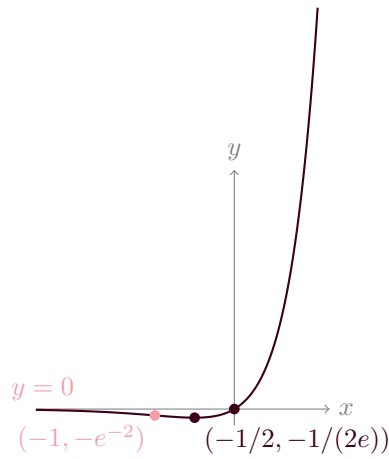
Para la curvatura,

$$f''(x) = 4e^{2x}(x + 1).$$

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, \infty)$; en $x = -1$ cambia la concavidad, así que hay un punto de inflexión $(-1, -e^{-2})$. Además, corta el eje OX en $(0, 0)$. En los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{2x} = +\infty.$$

Por ello tiene asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y no tiene asíntota cuando $x \rightarrow +\infty$.



b) La función es negativa en $[-1, 0)$ y positiva en $(0, 1]$. Para obtener el área geométrica, separamos la integral en el punto donde cruza el eje OX :

$$A = - \int_{-1}^0 x e^{2x} dx + \int_0^1 x e^{2x} dx.$$

Integramos por partes, con $u = x$ y $dv = e^{2x} dx$:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{4}.$$

Evaluando en los dos intervalos,

$$\begin{aligned} A &= - \left[\frac{e^{2x}(2x - 1)}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{e^{2x}(2x - 1)}{4} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} \right) + \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 2 - 3e^{-2}}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área entre la gráfica y el eje OX en $[-1, 1]$ es $\frac{e^2 + 2 - 3e^{-2}}{4}$.

Opción B - Ejercicio 4. Volumen y altura de un tetraedro

El plano corta los ejes en $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, \lambda, 0)$ y $C = (0, 0, 4)$, con $\lambda > 0$. El volumen de un tetraedro con vértices en el origen y en tres vectores independientes es un sexto del valor absoluto del determinante de esos vectores:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{4\lambda}{6} = \frac{2\lambda}{3}.$$

Al imponer $V = 2$ obtenemos $\lambda = 3$.

El plano con interceptos $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 4)$ tiene forma de interceptos $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, equivalente a

$$12x + 4y + 3z - 12 = 0.$$

La altura desde O es la distancia de ese punto al plano. Aplicando la fórmula para un punto (x_0, y_0, z_0) y un plano $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{12}{13}.$$

Conclusión. El valor es $\lambda = 3$ y la altura correspondiente al vértice O mide $12/13$.