

Problema 1. Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las cenas 10. El último sábado se sirvieron tantas comidas como desayunos y cena juntos. La recaudación total fue de 1116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

- ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron?
- ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,50 euros, las de una comida 4 euros y las de una cena 5 euros?

Solución:

Llamando:

	precio
$x =$ número de desayunos servidos	4€
$y =$ número de comidas servidas	8€
$z =$ número de cenas servidas	10€

De la información del problema:

$$\text{"se sirvieron tantas comidas como desayunos y cena juntos"} \rightarrow y = x + z \rightarrow x - y + z = 0$$

$$\text{"la recaudación total fue de 1116 €"} \rightarrow 4x + 8y + 10z = 1116 \rightarrow 2x + 4y + 5z = 558$$

$$\begin{aligned} \text{"La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 €"} &\rightarrow 8y = 10z + 156 \rightarrow \\ &\rightarrow 8y - 10z = 156 \rightarrow 4y - 5z = 78 \end{aligned}$$

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 558 \\ 4y - 5z = 78 \end{cases}$$

$$\text{Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 8 - 20 - 10 = -42 \neq 0$$

Por tanto el sistema es compatible y determinado. Lo resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 558 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 558 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 / 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 186 \\ 0 & 4 & -5 & 78 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 186 \\ 0 & 0 & -7 & -294 \end{array} \right)$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow -7z = -294 \rightarrow z = \frac{-294}{-7} = 42$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow 2y + z = 186 \rightarrow 2y + 42 = 186 \rightarrow 2y = 186 - 42 \rightarrow 2y = 144 \rightarrow y = \frac{144}{2} = 72$$

$$\text{De } F_1 \rightarrow x - y + z = 0 \rightarrow x - 72 + 42 = 0 \rightarrow x - 30 = 0 \rightarrow x = 30$$

Contestemos los apartados,

a) **Se sirvieron 30 desayunos, 72 comidas y 42 cenas.**

b) **El beneficio lo obtendremos calculando: $30 \cdot 2,5 + 72 \cdot 4 + 42 \cdot 5 = 573$**

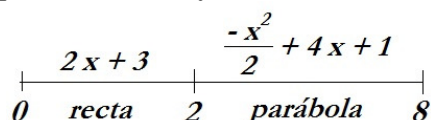
Se obtuvo un beneficio de 573 €.

Problema 2. Dada la función continua $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 4x + 1 & 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$

- a) Calcula sus máximos absolutos y mínimos absolutos, razonando que, efectivamente, lo son.
 b) Calcula el valor de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[5,7]$.

Solución:

Representemos la función,



x	y
0	3
2	7

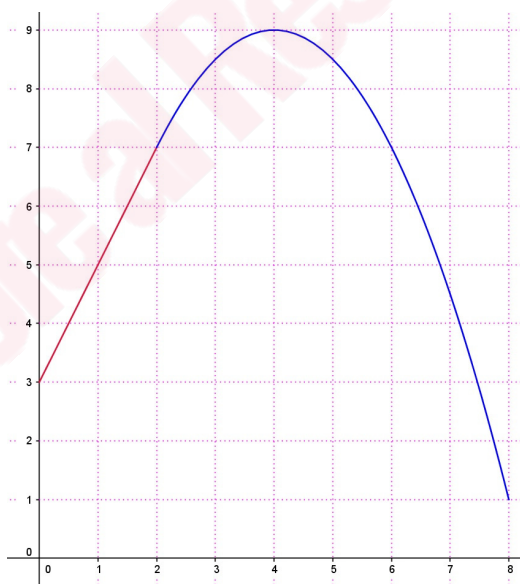
x	y
2	$-\frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 + 1 = -2 + 8 + 1 = 7$
8	$-\frac{8^2}{2} + 4 \cdot 8 + 1 = -32 + 32 + 1 = 1$

Vértice de la parábola: $(4, 9)$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{-4}{-1} = 4 \in [2, 8]$$

$$y = -\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 + 1 = -8 + 16 + 1 = 9$$

La representación gráfica de $f(x)$ será:



Resolvamos las preguntas,

a) De la representación gráfica deducimos que:

El máximo absoluto se alcanza en el punto $(4, 9)$ y el mínimo absoluto en el $(8, 1)$.

b)

$$\int_5^7 f(x) dx = \int_5^7 \left(-\frac{x^2}{2} + 4x + 1 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 + x \right]_5^7 = \left[-\frac{7^3}{6} + 2 \cdot 7^2 + 7 \right] - \left[-\frac{5^3}{6} + 2 \cdot 5^2 + 5 \right] = \frac{287}{6} - \frac{205}{6} = \frac{82}{6}$$

Problema 3. El 55% de los empleados de una empresa son licenciados, el 25% tienen un nivel de estudios de educación secundaria y el resto tan sólo nivel de estudios primarios. Un 20% de los licenciados, un 3% de los que tiene educación secundaria y un 1% de los que tienen estudios primarios ocupan un puesto directivo en la empresa.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

L = El empleado de la empresa es licenciado

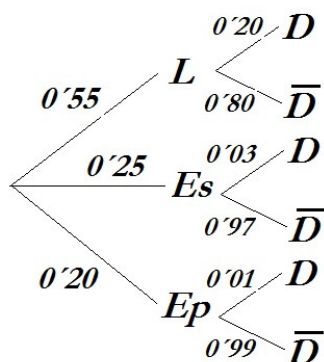
Es = El empleado de la empresa tiene educación secundaria

Ep = El empleado de la empresa tiene estudios primarios

D = ocupa puesto directivo

$\bar{D}$ = no ocupa puesto directivo

Los datos del problema podemos resumirlos mediante el árbol,



Resolvamos cada uno de los apartados del problema,

- a) Probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado.

$$P\left(\frac{L}{D}\right) = \frac{P(L \cap D)}{P(D)} = \frac{0.55 \cdot 0.20}{0.55 \cdot 0.20 + 0.25 \cdot 0.03 + 0.20 \cdot 0.01} = \frac{0.11}{0.1195} = 0.9205$$

- b) Probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios.

$$P(\bar{D} \cap Ep) = 0.20 \cdot 0.99 = 0.198$$

- c) Probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo.

$$\begin{aligned}
 P(Es \cup D) &= P(Es) + P(D) - P(Es \cap D) = \\
 &\{ P(D) \text{ lo hemos calculado en el apartado a) } P(D) = 0.1195 \} \\
 &= 0.25 + 0.1195 - 0.25 \cdot 0.03 = 0.362
 \end{aligned}$$

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A - I)^2$.

b) $A \cdot B^t$

c) $A - B^{-1}$

siendo I la matriz identidad y B^t y B^{-1} las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente.

Solución:

a) $(A - I)^2$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B^t$.

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A - B^{-1}$.

Cálculo de B^{-1} ,

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, calcula:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos locales.
- Representa gráficamente la función a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el $(0, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

Luego, $y = 1$ es la asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = -1$ y $x = 1$

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^2}{(-1)^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es A.V.}$$

$x = 1$

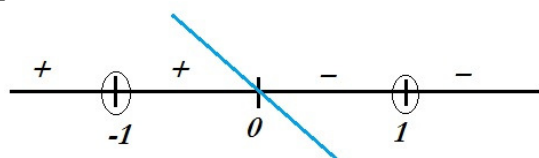
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^2}{1^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es A.V.}$$

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa (como $-2x = 0 \rightarrow x = 0$) que pasa por $(0, 0)$. Es decir,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y
 $f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ hay un máximo local. Y la función no tiene mínimos locales.

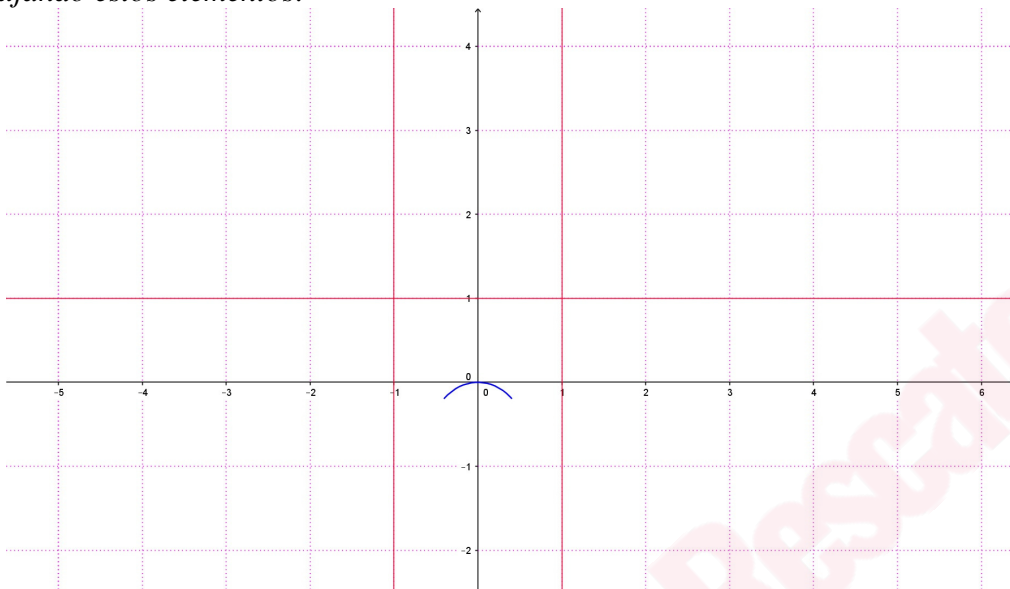
Máximo local en el punto $(0, 0)$

e) Representación gráfica.

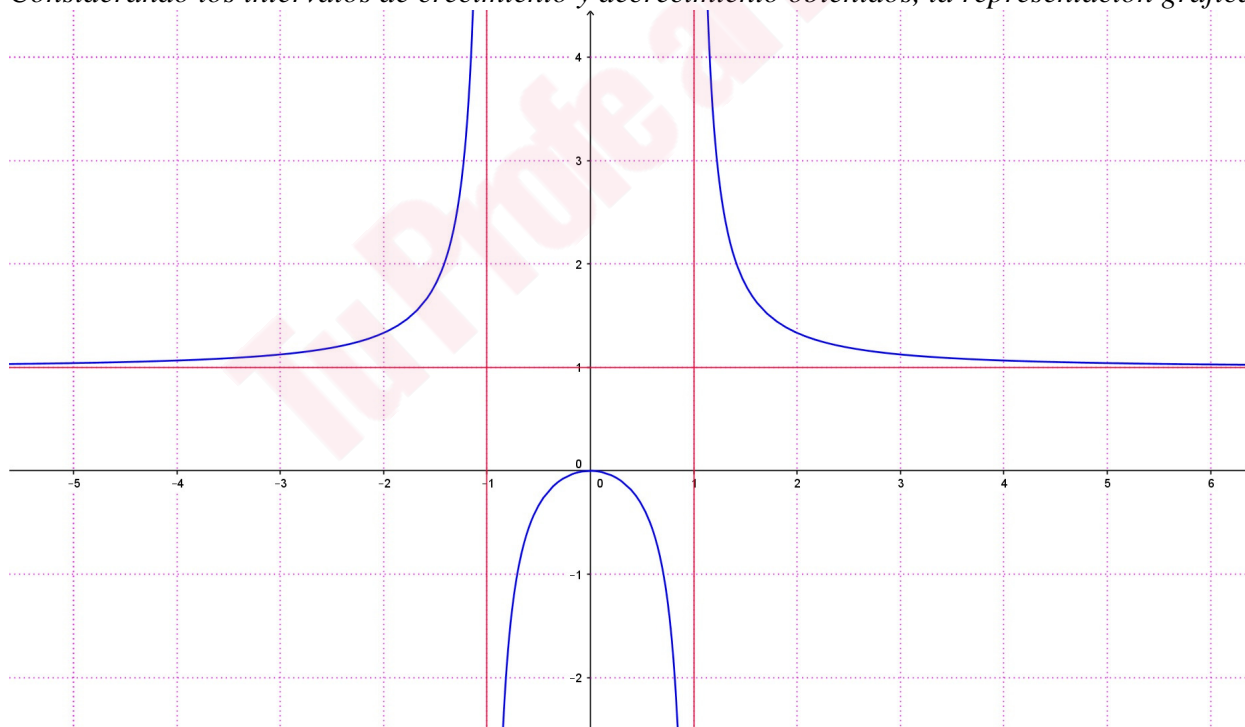
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ que, además, es máximo local; a.h. $y = 1$ y a.v. $x = -1$ y $x = 1$.

Dibujando estos elementos:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Problema 3. El 35% de los alumnos de un instituto viste vaqueros y el 50% lleva calzado deportivo. El 30% de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo. Calcula:

- La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros o use calzado deportivo.
- La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros y use calzado deportivo.
- La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros pero no use calzado deportivo.
- Si se elige un alumno al azar y se observa que no lleva calzado deportivo, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve vaqueros?

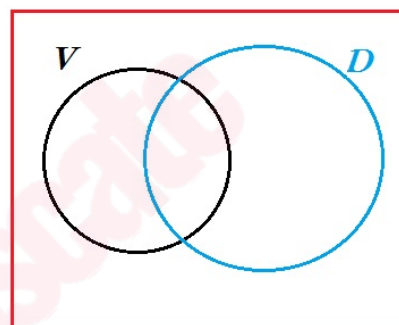
Solución:

Usando los sucesos:

V = el alumno viste vaqueros

D = el alumno lleva calzado deportivo

Podemos representar los datos del problema en un diagrama de Venn,



De los datos del problema sabemos:

El 35% de los alumnos de un instituto viste vaqueros: $P(V) = 0.35$

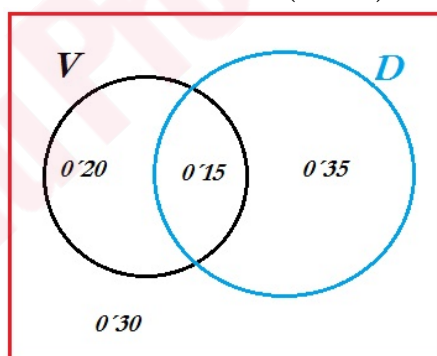
El 50% lleva calzado deportivo: $P(D) = 0.50$

El 30% de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo: $P(\overline{V \cup D}) = 0.30$

Como $P(\overline{V \cup D}) = 0.30$, $1 - P(V \cup D) = 0.30 \rightarrow 1 - 0.30 = P(V \cup D) \rightarrow P(V \cup D) = 0.70$

$P(V \cup D) = P(V) + P(D) - P(V \cap D)$

$0.70 = 0.35 + 0.50 - P(V \cap D) \rightarrow 0.70 = 0.85 - P(V \cap D) \rightarrow P(V \cap D) = 0.85 - 0.70 = 0.15$



Completamos el diagrama:

Resolvamos cada uno de los apartados,

a) $P(V \cup D) = 0.70$
{obtenido anteriormente}

b) $P(V \cap D) = 0.15$
{obtenido anteriormente}

c) $P(V \cap \overline{D}) = 0.20$ {del diagrama}

d)

$$P\left(\frac{\overline{V}}{D}\right) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} =$$

Por leyes de Morgan: $P(\overline{V} \cap \overline{D}) = P(\overline{V \cup D}) = 0.30$

Por definición: $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.50 = 0.50$

$$= \frac{0.30}{0.50} = 0.6$$