

Modelo 3 de 2001

Límites, funciones con valor absoluto, matrices ortogonales, planos, sistemas y rectas.

Opción A - Ejercicio 1

Al sustituir $x = 0$ se obtiene una indeterminación $0/0$. Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + (e^x - 1) \cos x}{3x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x + \sin x}{6x - 2} = -1.$$

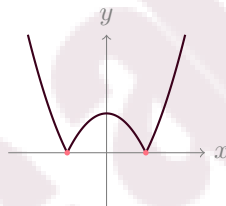
Por tanto, el límite pedido es $\boxed{-1}$. **Opción A - Ejercicio 2**

El dominio es $\mathbb{R}$. Como $f(x) = |x^2 - 1|$, distinguimos el signo del radicando:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \text{ o } x \geq 1, \\ 1 - x^2, & -1 < x < 1. \end{cases}$$

La gráfica está formada por las ramas exteriores de $y = x^2 - 1$ y el arco de $y = 1 - x^2$ entre -1 y 1 ; se unen en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. En los intervalos abiertos, las derivadas son $2x$ en las ramas exteriores y $-2x$ en la rama central. En $x = 1$, las derivadas laterales son -2 y 2 ; en $x = -1$ son -2 y 2 . Como no coinciden, f no es derivable en $x = \pm 1$; sí lo es en el resto de $\mathbb{R}$. Para calcular la integral, separamos donde cambia la expresión:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{2}.$$



Opción A - Ejercicio 3

Las columnas de A son $C_1 = (a, 0, b)$, $C_2 = (0, -1, 0)$ y $C_3 = (-a, 0, b)$. La ortogonalidad de C_1 y C_3 exige

$$C_1 \cdot C_3 = -a^2 + b^2 = 0, \quad b = \pm a.$$

Por expansión del determinante,

$$\det A = -2ab = 1 \implies ab = -\frac{1}{2}.$$

Si $b = a$, resultaría $a^2 = -1/2$, imposible en los reales. Por tanto $b = -a$ y $a^2 = 1/2$, de donde

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ o } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

En ambos casos, las tres columnas son ortogonales y tienen módulo 1; por ello forman una base ortonormal. Así, $A^t A = I$ y, por definición de inversa, $A^{-1} = A^t$. **Opción A - Ejercicio 4**

Los vectores normales de los planos son $n_1 = (2, 0, 0)$ y $n_2 = (3, 3, 0)$. El ángulo entre los planos es el ángulo agudo entre sus normales:

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|} = \frac{6}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = 45^\circ.$$

Un plano perpendicular a ambos debe tener un vector normal perpendicular a n_1 y n_2 . El vector $(0, 0, 1)$ cumple ambas condiciones. Al pasar por el origen, su ecuación general es $z = 0$. **Opción B - Ejercicio 1**

Para que f sea derivable en $x = 1$, primero igualamos los límites laterales y el valor. La continuidad se cumple para cualquier a , pues ambas ramas valen 0 en 1. Las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'_-(1) = a, \quad f'_+(1) = (\ln x + 1)|_{x=1} = 1.$$

Luego $a = 1$. La integral se calcula usando la rama correspondiente en cada tramo:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 x \ln x dx.$$

Por partes, con $u = \ln x$ y $dv = x dx$, una primitiva de $x \ln x$ es $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$. Por tanto,

$$-\frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Opción B - Ejercicio 2

La segunda derivada vale 3, así que integramos dos veces. La tangente en $x = 1$ tiene pendiente 5 y pasa por $(1, 2)$, ya que $5(1) - y - 3 = 0$ da $y = 2$:

$$f'(x) = 3x + C, \quad f'(1) = 5 \implies C = 2,$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + D, \quad f(1) = 2 \implies D = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto, $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & m \end{array} \right).$$

Su determinante es $\det A = -m(m^2 + 3)$. Si $m \neq 0$, es distinto de cero, por lo que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$: por Rouché-Frobenius hay una única solución (SCD). Resolviendo el sistema se obtiene

$$(x, y, z) = \left(\frac{2m^2 + 3m + 5}{m(m^2 + 3)}, -\frac{3m^2 - 2m + 5}{m(m^2 + 3)}, \frac{(m-1)(m^2 + m + 5)}{m(m^2 + 3)} \right).$$

Si $m = 0$, la matriz de coeficientes tiene rango 2. Restar la segunda ecuación de la tercera da $y - z = -4$, mientras que la primera ecuación exige $y - z = 1$; el sistema es incompatible. En este caso $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 3$, luego es SI. Geométricamente, para $m = 0$ los planos se cortan dos a dos en rectas paralelas distintas, sin punto común; para $m \neq 0$ concurren en el punto solución. **Opción B - Ejercicio 4**

La recta es la intersección de los planos de normales $n_1 = (3, 2, 0)$ y $n_2 = (3, 0, 1)$. Su vector director se obtiene con el producto vectorial:

$$d = n_1 \times n_2 = (2, -3, -6), \quad \|d\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7.$$

Los puntos de la recta a distancia 7 del origen son $\pm 7d/\|d\|$, es decir, $(2, -3, -6)$ y $(-2, 3, 6)$. Para el plano perpendicular a la recta, usamos d como vector normal y exigimos que pase por $P(1, 2, -1)$:

$$2(x - 1) - 3(y - 2) - 6(z + 1) = 0 \implies 2x - 3y - 6z - 2 = 0.$$