

Resolución de los ocho ejercicios con justificación y resultados exactos.

Ejercicio 1

La continuidad en $x = 0$ exige $\sqrt{b} = 2$, luego $b = 4$. En $x = 2$, las ramas segunda y tercera deben coincidir:

$$\sqrt{2a+4} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

por lo que $2a + 4 = 2$ y $a = -1$. Para los valores dados en el apartado b), la función es continua en $x = 2$ y $f(2) = \sqrt{2}$. Las derivadas laterales también coinciden:

$$f'_-(2) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \Big|_{x=2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad f'_+(2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por tanto, es derivable y la recta tangente en $(2, \sqrt{2})$ es

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 2).$$

Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$, ya que $x^2 + 1 > 0$. La derivada permite estudiar el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$, así que f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. En $x = 0$ alcanza el mínimo absoluto $f(0) = 0$. Para la curvatura calculamos

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

El denominador es siempre positivo; por ello $f'' > 0$ en $(-1, 1)$ y $f'' < 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Hay cambios de concavidad en $x = \pm 1$, de modo que los puntos de inflexión son $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$.

Ejercicio 3

Por el teorema fundamental del cálculo, $F'(x) = 2x \cos x$. En $[0, 2\pi]$, el factor $2x$ es no negativo, así que el signo de F' viene dado por $\cos x$: F crece en $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$, y decrece en $[\pi/2, 3\pi/2]$. Integramos por partes para hallar $F(\pi)$:

$$F(x) = \int_0^x 2t \cos t \, dt = 2x \sin x + 2 \cos x - 2, \quad F(\pi) = -4.$$

La pendiente en $x = \pi$ es $F'(\pi) = -2\pi$. Por tanto, la tangente es

$$y + 4 = -2\pi(x - \pi).$$

Ejercicio 4

Aplicamos integración por partes con $u = \arctan x$ y $dv = x \, dx$. Así,

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Como $x^2/(1+x^2) = 1 - 1/(1+x^2)$, resulta

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 5

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $\det A = -(m+2)(3m-1)$. Para $m \neq -2, 1/3$, el determinante no se anula, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$: el sistema es compatible determinado. Si $m = -2$, se obtiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, luego es compatible indeterminado. La reducción da $x - z = 3/7$, $y = -1/7$; así, $x = \lambda$ y $z = \lambda - 3$ no pueden satisfacer el sistema para ningún λ , pues exigirían $x - z = 3$ y no $3/7$. No existe el valor solicitado de y_0 . Si $m = 1/3$, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

Ejercicio 6

La condición $A^{-1} = \frac{1}{4}A$ equivale, al multiplicar por A , a $A^2 = 4I$. Aquí

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 3a & 0 \\ 0 & a^2 + 3a \end{pmatrix}.$$

Como $a \neq 0$, debemos resolver $a^2 + 3a = 4$, es decir, $(a+4)(a-1) = 0$. Ambos valores hacen invertible a A , así que $\boxed{a = -4 \text{ o } a = 1}$. Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{4}A$. Luego $X = A^{-1}B^t$:

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 9/4 & 5/4 \\ 0 & 7/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7

La recta r tiene un punto $P = (0, 1, 0)$ y vector director $u = (1, -1, 0)$. El plano buscado debe contener este director y ser perpendicular al plano π , cuyo vector normal es $n = (1, 1, 1)$. Por tanto, un normal del plano buscado puede tomarse como $u \times n = (-1, -1, 2)$, proporcional a $(1, 1, -2)$. Al pasar por P , su ecuación general es

$$\boxed{x + y - 2z - 1 = 0}.$$

La recta es paralela al plano π : todo punto de r satisface $x + y = 1$, por lo que su distancia al plano es constante. Usando P ,

$$d(r, \pi) = \frac{|0 + 1 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Ejercicio 8

Parametrizamos r mediante $(x, y, z) = (1 + t, 2t, -1 + 5t)$, cuyo vector director es $v = (1, 2, 5)$. Sustituyendo en los planos,

$$2x + y + z - 3 = 9t - 2, \quad x + 2y - z + 5 = 7.$$

Los normales tienen ambos módulo $\sqrt{6}$, así que la igualdad de distancias se reduce a $|9t - 2| = |7|$. Se obtiene $t = 1$ o $t = -5/9$, y los puntos son

$$\boxed{(2, 2, 4), \quad (4/9, -10/9, -34/9)}.$$

El seno del ángulo entre una recta de vector director v y un plano de normal n es $|v \cdot n| / (\|v\| \|n\|)$. Para $n = (2, 1, 1)$,

$$\sin \theta = \frac{|(1, 2, 5) \cdot (2, 1, 1)|}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{10}}.$$