

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es:
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 - a + 1 = -a^2 - a + 2$$

$$-a^2 - a + 2 = 0; \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 \\ \frac{1-3}{-2} = 1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y 1

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 3 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \left\{ \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{F_1 = F_3\} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, si $a \neq -2$ y 1 , el sistema es compatible determinado;

si $a = -2$, el sistema es incompatible;

si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible en dos casos. Obtengamos la solución en cada caso.

Si $a \neq -2$ y 1 , S. C. D.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array} \right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 2 \quad (\text{calculado anteriormente y como las raíces de este polinomio son } 1 \text{ y } -2)$$

$$= -(a-1)(a+2)$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a - a - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a^2 - a + 1 - a^2 - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2a + 2}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a + 1 - a^2 - a}{-a^2 - a + 2} = \frac{1 - a^2}{-a^2 - a + 2} = \frac{(1-a)(1+a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}$$

Si $a \neq -2$ y 1 , la solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{a+2} \\ y = \frac{2}{a+2} \\ z = \frac{a+1}{a+2} \end{cases}$$

Si $a = 1$, S. C. I.

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales y z .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 - x \end{cases} \rightarrow \text{Solución} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $a = 1$ la solución es:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tu Profe al Rescate

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 (4 puntos)
- b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
- c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$ (3 puntos)

Solución:

a) Para que exista A^{-1} , $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1} \text{ cuando } a^2 \neq b^2$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 1 & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ -1 & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$Y, A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a^2 - b^2} & \frac{-1}{a^2 - b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{a^2 - b^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{como } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a^2 - b^2} & \frac{-1}{a^2 - b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{a^2 - b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} & \frac{-1}{a^2 - b^2} \\ 0 & \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \end{pmatrix} =$$

$$\text{simplificando; } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+b)} & \frac{-1}{a^2 - b^2} \\ 0 & \frac{1}{(a-b)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Debe cumplirse que } \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+b)} & \frac{-1}{a^2 - b^2} \\ 0 & \frac{1}{(a-b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+b)} = 1 \\ \frac{-1}{a^2 - b^2} = -1 \\ \frac{1}{(a-b)} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ a^2 - b^2 = 1 \\ a-b = 1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por la primera y tercera ecuaciones, después comprobaremos que la solución cumple la segunda ecuación.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases} \text{ sumando ambas ecuaciones, } 2a=2, \quad a=1. \quad \text{Sustituyendo en la 1ª, } 1+b=1, \quad b=0$$

Como $1^2 - 0^2 = 1$, cumple la segunda ecuación. Y además $1^2 - 0^2 \neq 0$

La solución del sistema es $a=1$ y $b=0$.

Solución: los valores de los parámetros pedidos son $a=1$ y $b=0$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcular A^3 y A^4 .

$$\text{Para } a = 1 \text{ y } b = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$

Como $a^2 - b^2 \neq 0$, según obtuvimos en el apartado a), $\exists A^{-1}$

Considerando las propiedades de los determinantes: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$A^{-50} = (A^{50})^{-1} \rightarrow \det(A^{-50}) = \det((A^{50})^{-1}) = \frac{1}{\det(A^{50})} = \frac{1}{[\det(A)]^{50}} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$$

Solución: $\det(A^{-50}) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
- Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

Solución:

a) ¿ r ? / r es la recta que pasa por A y B .

$$\text{De la recta } r \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(2,0,0) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) \end{cases} \rightarrow r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

La ecuación de la recta r como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} \\ \frac{x-2}{-2} = \frac{z}{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = -2y \\ 0 = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } r: \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) ¿Plano π ? / $s \subset \pi$ y $\pi \parallel r$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

Para obtener la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores de él.

$$\text{Punto, como } s \subset \pi \rightarrow P_s \in \pi \rightarrow P_s(1,1,0)$$

$$\text{Vectores directores, } \begin{cases} s \subset \pi \rightarrow \vec{u} = \vec{v}_s = (2,3,1) \\ \pi \parallel r \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_r = (-2,1,0) \end{cases}$$

La ecuación del plano π la obtenemos calculando:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)2 + z8 = 0$$

$$-x+1-2y+2+8z=0 \rightarrow -x-2y+8z+3=0 \rightarrow x+2y-8z-3=0$$

Solución: la ecuación del plano π es $x+2y-8z-3=0$.

c) ¿ $d(A,s)$?

$$A(2,0,0) \quad y \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z \rightarrow \begin{cases} P_s(1,1,0) \\ \vec{v}_s(2,3,1) \end{cases}$$

$$d(A,s) = \frac{\left| \overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s \right|}{\left| \vec{v}_s \right|}$$

$$\overrightarrow{AP_s} = (-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-1) + \vec{k} \cdot (-3-2) = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} = (1,1,-5)$$

$$\left| \overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{27}$$

$$\left| \vec{v}_s \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{Finalmente, } d(A,s) = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} \cong 1,38873...$$

Tu Prof te al Rescate

Problema 4. Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C . (5 puntos)

Solución:

a) Llamando r a la recta perpendicular a π que pasa por B . Obtengamos la ecuación de r .

$$\text{De la recta } r \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } B(3,2,3) \\ \text{vector director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano π ,

$$2(3 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda = 3; \quad 6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda = 3; \quad 9\lambda + 13 = 3; \quad 9\lambda = -10; \\ \lambda = \frac{-10}{9}$$

El punto C lo obtendremos sustituyendo este valor de λ en la ecuación de r :

$$\begin{cases} x = 3 + 2\frac{-10}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 + 2\frac{-10}{9} = \frac{-2}{9} \\ z = 3 + \frac{-10}{9} = \frac{17}{9} \end{cases} \rightarrow C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{17}{9} \right)$$

$$\text{Solución: } C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{17}{9} \right).$$

b) Área del triángulo de vértices A , B y C .

El área de este triángulo la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}|$

$$\vec{AB} = (1, 1, 5), \quad \vec{BC} = \left(\frac{7}{9} - 3, \frac{-2}{9} - 2, \frac{17}{9} - 3 \right) = \left(\frac{-20}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{-10}{9} \right),$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ \frac{-20}{9} & \frac{-20}{9} & \frac{-10}{9} \end{vmatrix} = \frac{-10}{9} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-10}{9} \left(\vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{-10}{9} (-9\vec{i} + 9\vec{j}) = 10\vec{i} - 10\vec{j} = (10, -10, 0) \end{aligned}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{BC}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 0^2} = 10\sqrt{2}; \quad A_T = \frac{1}{2} 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ u.a.} \approx 7.0711 \text{ u.a.}$$

El área del triángulo pedida es $5\sqrt{2}$ u.a.

Problema 5.

a) Calcular indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (2 puntos)

Solución:

a) Para calcular la integral definida dada, obtengamos las raíces del denominador del integrando:

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+9}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{5-9}{2} = -2 \end{cases}$$

Descomponemos el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \frac{18}{(x-7)(x+2)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-7)}{(x-7)(x+2)} \rightarrow 18 = A(x+2) + B(x-7)$$

$$\text{Para } x = -2 \rightarrow 18 = A(-2+2) + B(-2-7); \quad 18 = -9B; \quad B = -2$$

$$\text{Para } x = 7 \rightarrow 18 = A(7+2) + B(7-7); \quad 18 = 9A; \quad A = 2$$

Por lo que:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \int \left(\frac{2}{x-7} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \frac{2}{x-7} dx - \int \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x-7| - 2 \ln|x+2| + C$$

$$\text{Solución: } \int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = 2 \ln|x-7| - 2 \ln|x+2| + C$$

$$b) \int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

Hemos calculado la integral indefinida en el apartado anterior, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx &= [2 \ln|x-7| - 2 \ln|x+2|]_8^t = (2 \ln|t-7| - 2 \ln|t+2|) - (2 \ln|8-7| - 2 \ln|8+2|) = \\ &= 2 \ln|t-7| - 2 \ln|t+2| - 2 \ln|1| + 2 \ln|10| = 2 \ln|t-7| - 2 \ln|t+2| + 2 \ln 10 \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = 2 \ln|t-7| - 2 \ln|t+2| + 2 \ln 10$$

$$c) \text{ ¿} t? / t > 8 \text{ y } \int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \ln \frac{25}{4}$$

A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, la ecuación a resolver es:

$$2 \ln|t-7| - 2 \ln|t+2| + 2 \ln 10 = \ln \frac{25}{4}, \quad \text{aplicando propiedades de los logaritmos:}$$

$$\ln (t-7)^2 - \ln (t+2)^2 + \ln 10^2 = \ln \frac{25}{4}$$

$$\ln \frac{(t-7)^2}{(t+2)^2} + \ln 100 = \ln \frac{25}{4}$$

$$\ln \frac{(t-7)^2 \cdot 100}{(t+2)^2} = \ln \frac{25}{4} \rightarrow \frac{(t-7)^2 \cdot 100}{(t+2)^2} = \frac{25}{4} \rightarrow 400 (t-7)^2 = 25 (t+2)^2$$

$$16 (t-7)^2 = (t+2)^2; \quad 16 (t^2 - 14t + 49) = t^2 + 4t + 4; \quad 16t^2 - 224t + 784 = t^2 + 4t + 4$$

$$15t^2 - 228t + 780 = 0 \rightarrow t = \frac{-(-228) \pm \sqrt{(-228)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 720}}{2 \cdot 15} = \frac{228 \pm 72}{30} = \begin{cases} t_1 = \frac{228+72}{30} = 10 > 8 \\ t_2 = \frac{228-72}{30} = \frac{26}{5} = 5.2 < 8 \end{cases}$$

Por tanto, **solución** $t = 10$.

Tu Profecia al Rescate

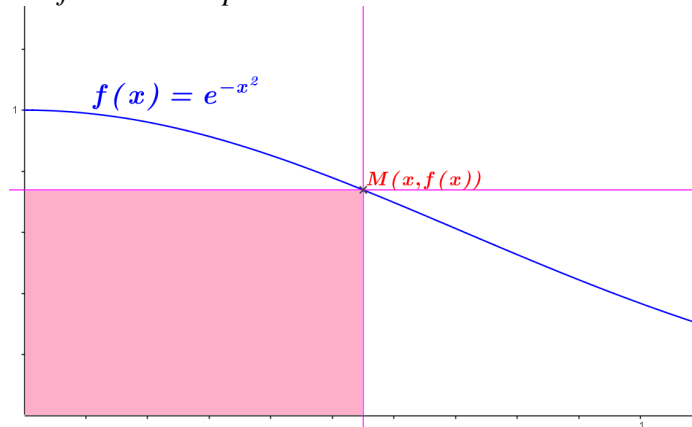
Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Solución:

Gráficamente el problema es:



- a) Área del rectángulo en función de x

El rectángulo definido tiene de base x y de altura $f(x) = e^{-x^2}$

Su área es: $A_R(x) = x e^{-x^2} \quad x > 0$

- b) ¿ M ? / A_R sea máxima

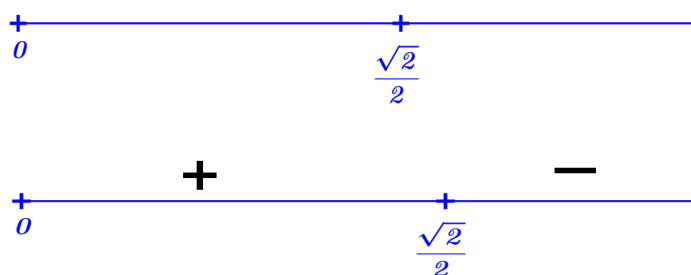
$$A_R(x) = x e^{-x^2}$$

$$A'_R(x) = e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

$$A'_R(x) = 0 \rightarrow e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 & \text{sin solución} \\ (1 - 2x^2) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Como $x > 0$, solución $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 \dots$

Debemos estudiar el signo de $A'_R(x)$ en los intervalos:



x	$A'_R(x)$
0.5	$e^{-0.5^2} (1 - 2 \cdot 0.5^2) = 0.38... > 0$
1	$e^{-1^2} (1 - 2 \cdot 1^2) = -0.367... < 0$

El máximo relativo se alcanza en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.

Calculemos el punto M ,

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \rightarrow M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Y el área máxima

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow A_R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \cong 0'4289 \text{ u.a.}$$

Solución: el punto M que proporciona mayor área es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y esta área mide $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ u.a.

Tu Prof te al Rescate