

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Sistema homogéneo con parámetro

Un sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial cuando su matriz de coeficientes es singular. Por eso igualamos a cero su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = (k-2)(k+1).$$

Así, solo hay soluciones no triviales si $k = 2$ o $k = -1$. Para los demás valores, el determinante es distinto de cero y la única solución es $(0, 0, 0)$.

Si $k = 2$, la tercera ecuación da $y = -3x$ y la segunda da $z = y - 2x = -5x$. Por tanto, x queda libre y

$$(x, y, z) = t(1, -3, -5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $k = -1$, la tercera ecuación da $y = 0$ y la primera da $z = x$. Por tanto,

$$(x, y, z) = t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Hay soluciones no triviales para $k = 2$ y $k = -1$; las familias de soluciones son las indicadas.

Opción A - Ejercicio 2. Matrices que conmutan

Escribimos la matriz desconocida con cuatro entradas y calculamos los dos productos por separado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
$$AP = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}.$$

La igualdad $AP = PA$ exige $2c = 0$ y $2d = 2a$. Las otras entradas repiten esas condiciones. Por ello $c = 0$ y $d = a$, mientras que b puede ser cualquier real:

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Todas las matrices buscadas son $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 3. Función racional y sucesión

a) La función es $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Al ser racional, su dominio excluye los ceros del denominador:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Para estudiar las asíntotas, reescribimos $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$. En el punto excluido del dominio,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty,$$

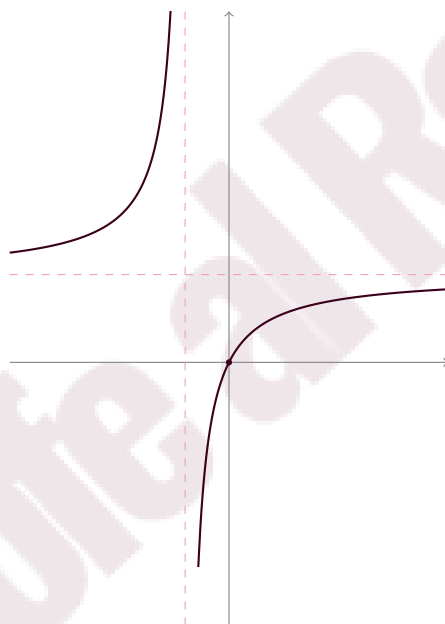
así que $x = -1$ es asíntota vertical. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2,$$

por lo que $y = 2$ es asíntota horizontal en ambos extremos. La derivada determina el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad (x \neq -1).$$

Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, \infty)$, y no tiene extremos relativos. Corta los ejes en $(0, 0)$; estos datos, junto con las asíntotas, determinan sus dos ramas.



b) Para demostrar que $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es creciente, comparamos términos consecutivos:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2((n+1)^2 - n(n+2))}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

La diferencia es positiva para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que cada término supera al anterior. **Conclusión.** La sucesión (a_n) es estrictamente creciente.

c) Usamos la diferencia ya obtenida para calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} = 2.$$

Conclusión. El límite pedido vale 2.

Opción A - Ejercicio 4. Rectas en el espacio

Tomamos como puntos y vectores directores

$$r : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + t(-2, 2, -4), \quad s : (x, y, z) = (2, -1, -2) + u(3, 1, 1).$$

a) Para que una recta que pasa por el origen corte a ambas, sus puntos de corte en r y s deben estar alineados con el origen. Igualamos sus vectores de posición mediante un factor λ :

$$(-1 - 2t, 2 + 2t, -4t) = \lambda(2 + 3u, -1 + u, -2 + u).$$

Resolviendo se obtiene $t = -\frac{17}{38}$, $u = -\frac{8}{13}$ y $\lambda = -\frac{13}{19}$. El punto de r es $(-2/19, 21/19, 34/19)$, que es proporcional a $(-2, 21, 34)$; el punto correspondiente de s también es proporcional a ese vector. Así, una ecuación paramétrica de la recta buscada es

$$(x, y, z) = v(-2, 21, 34), \quad v \in \mathbb{R}.$$

b) Sean P y Q los puntos de r y s más próximos, respectivamente. El segmento PQ será perpendicular a las dos rectas cuando su vector sea perpendicular a ambos directores. Con

$$P = (-1, 2, 0) + t(-2, 2, -4), \quad Q = (2, -1, -2) + u(3, 1, 1),$$

las condiciones $(Q - P) \cdot (-2, 2, -4) = 0$ y $(Q - P) \cdot (3, 1, 1) = 0$ quedan

$$6t + 2u + 1 = 0, \quad 8t + 11u + 4 = 0.$$

De aquí $t = -\frac{3}{50}$ y $u = -\frac{8}{25}$, luego

$$P = \left(-\frac{22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25}\right), \quad Q = \left(\frac{26}{25}, -\frac{33}{25}, -\frac{58}{25}\right).$$

La dirección común perpendicular es el producto vectorial de los directores, que resulta proporcional a $(3, -5, -4)$. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(-\frac{22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25}\right) + v(3, -5, -4), \quad v \in \mathbb{R}.$$

La distancia entre las rectas, igual a $|PQ|$, es

$$|PQ| = \frac{16}{25} \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

Conclusión. La recta perpendicular común es la anterior y la distancia entre r y s vale $16\sqrt{2}/5$.

Opción B - Ejercicio 1. Área con una proyección ortogonal

La recta pasa por O y tiene vector director $(4, 3, 1)$, así que $P = (4t, 3t, t)$. La proyección ortogonal sobre $z = 0$ es $Q = (4t, 3t, 0)$. El triángulo OPQ es rectángulo en Q : sus catetos miden $|OQ| = 5|t|$ y $|PQ| = |t|$. Aplicamos la fórmula del área de un triángulo rectángulo:

$$1 = \frac{1}{2}|OQ||PQ| = \frac{5}{2}t^2, \quad t^2 = \frac{2}{5}.$$

Por tanto, $t = \pm\sqrt{10}/5$ y

$$P = \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \quad \text{o} \quad P = \left(-\frac{4\sqrt{10}}{5}, -\frac{3\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5} \right).$$

Opción B - Ejercicio 2. Posición relativa de dos rectas

La recta r tiene punto $R = (-4, 7, 0)$ y vector director $\vec{d}_r = (-3, 4, 1)$. La recta s es la intersección de dos planos, con normales $\vec{n}_1 = (1, 2, -5)$ y $\vec{n}_2 = (2, 1, 2)$. Su vector director es el producto vectorial de estas normales:

$$\vec{d}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (9, -12, -3) = -3\vec{d}_r.$$

Las direcciones son proporcionales, por lo que las rectas son paralelas o coincidentes. Para distinguir estos casos, buscamos un punto de s : al tomar $z = 0$ en las ecuaciones de sus planos se obtiene $S = (1, 2, 0)$. Este punto no pertenece a r , pues $S - R = (5, -5, 0)$ no es proporcional a $\vec{d}_r$. **Conclusión.** Las rectas r y s son paralelas distintas.

Opción B - Ejercicio 3. Rango e inversa según un parámetro

La matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Al ser cuadrada de orden tres, su determinante permite decidir cuándo tiene rango tres:

$$\det M = -2a(a-1)(a+1).$$

Si $a \notin \{-1, 0, 1\}$, el determinante no se anula y $\text{rg}(M) = 3$. Para los tres valores restantes, el determinante se anula; exhibimos un menor de orden dos no nulo en cada caso:

$$a = -1: \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad a = 0: \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad a = 1: \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

En cada caso el rango es al menos dos y, como el determinante de orden tres es cero, es exactamente dos. **Conclusión.** $\text{rg}(M) = 3$ si $a \notin \{-1, 0, 1\}$ y $\text{rg}(M) = 2$ si $a = -1, 0, 1$. La matriz tiene inversa precisamente cuando $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

Para $a = 2$,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_2 = -12, \quad \text{adj}(M_2) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Usando $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{adj}(M)$,

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4. Estudio de una función y área

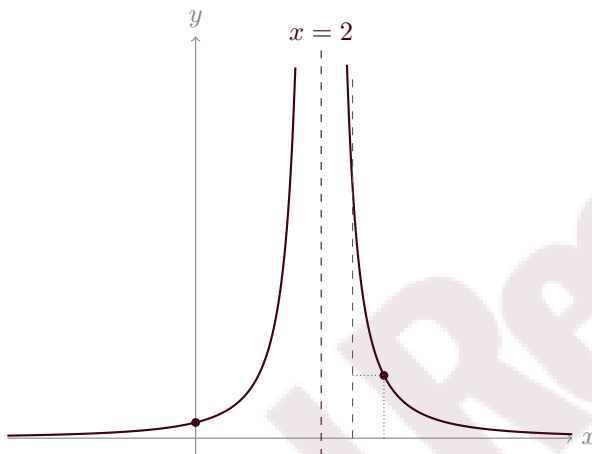
a) La función es $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. El denominador no puede ser cero, de modo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Calculamos derivadas para estudiar crecimiento y curvatura:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4} > 0.$$

Así, f crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, \infty)$; no tiene extremos relativos. Es convexa en ambos intervalos de su dominio y no tiene puntos de inflexión. Los límites

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

indican las asíntotas $x = 2$ e $y = 0$. Además, la función siempre es positiva y pasa por $(0, 1/4)$.



b) La recta $y = 1$ corta la rama derecha cuando $1/(x-2)^2 = 1$, es decir, en $x = 3$ (la otra intersección, $x = 1$, está en la rama izquierda). Entre $x = 5/2$ y $x = 3$, la gráfica está por encima de $y = 1$. El área es, por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_{5/2}^3 \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{x-2} - x \right]_{5/2}^3 \\ &= (-1 - 3) - \left(-2 - \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada vale $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.