

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de coincidencias de 2024

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta A.1 - Sistema de ecuaciones

Sean l , a y h el largo, el ancho y el alto del ortoedro, en metros. La primera condición dice que al doble del largo hay que añadir 2 para obtener la suma del ancho y el alto:

$$2l + 2 = a + h.$$

Las otras condiciones dan $l = a - h + 8$ y $2(l + a) = 54$. Así, resolvemos

$$\begin{cases} 2l - a - h = -2, \\ l - a + h = 8, \\ l + a = 27. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $a = 27 - l$. La primera proporciona $h = 3l - 25$. Sustituyendo en la segunda,

$$l - (27 - l) + (3l - 25) = 8 \implies 5l = 60 \implies l = 12.$$

Por tanto, $a = 15$ y $h = 11$. Como cada caja es un cubo de 1 m de lado, el número de cajas coincide con el volumen en metros cúbicos:

$$V = l a h = 12 \cdot 15 \cdot 11 = 1980.$$

Conclusión. La cosecha produjo 1980 cajas de sandías.

Pregunta A.2 - Función racional

a) Dominio y asíntotas

El denominador $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ se anula en $x = \pm 1$, por lo que

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Para simplificar la expresión factorizamos el numerador:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1, 1.$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, pues el límite existe y vale $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; por ello no hay asíntota vertical en ese punto. En $x = -1$, el numerador de la forma simplificada vale 1 y el denominador tiende a cero:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Así, $x = -1$ es una asíntota vertical.

Para estudiar la asíntota en el infinito, usamos la forma $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} &= 0 \implies f(x) - x \rightarrow 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Conclusión. La asíntota oblicua es $y = x$; no hay asíntota horizontal.

b) Recta tangente en $(2, \frac{7}{3})$

La pendiente de la tangente en $x = 2$ es $f'(2)$. Derivamos la expresión simplificada, válida en el dominio:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'(2) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

La recta de pendiente m que pasa por (x_0, y_0) cumple $y - y_0 = m(x - x_0)$. Sustituyendo los datos:

$$y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x - 2) \implies y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}.$$

Conclusión. La tangente pedida es $y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$.

c) Tangente de pendiente 1

Buscamos un punto del dominio donde la derivada valga 1:

$$1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \implies \frac{1}{(x+1)^2} = 0.$$

Esta ecuación no tiene solución real, ya que una fracción de numerador 1 nunca puede ser cero. **Conclusión.** No existe ningún x_0 del dominio con tangente de pendiente 1.

Pregunta A.3 - Rectas y planos

La recta s se expresa en forma paramétrica tomando como parámetro el valor común de las tres expresiones:

$$s: \quad x = -1 + 2\lambda, \quad y = 2 + \lambda, \quad z = -\lambda.$$

Por tanto, pasa por $Q = (-1, 2, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (2, 1, -1)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

a) Recta por P , secante a s y paralela a π

El punto de corte T debe pertenecer a s , así que $T = (-1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -\lambda)$. La recta que une P con T será paralela a π si su vector director es perpendicular al normal $\vec{n}$. Calculamos:

$$\overrightarrow{PT} = T - P = (2\lambda, \lambda, -\lambda - 6).$$

Imponemos $\overrightarrow{PT} \cdot \vec{n} = 0$:

$$(2\lambda, \lambda, -\lambda - 6) \cdot (3, -2, 1) = 6\lambda - 2\lambda - \lambda - 6 = 0,$$

de donde $\lambda = 2$, y $T = (3, 4, -2)$. Entonces

$$\overrightarrow{PT} = (3, 4, -2) - (-1, 2, 6) = (4, 2, -8),$$

que podemos simplificar a $(2, 1, -4)$. La recta buscada, en forma paramétrica, es

$$r: \quad x = -1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 6 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta buscada es la anterior.

b) Simétrico de P respecto de π

Si H es el pie de la perpendicular desde P al plano, el vector $\overrightarrow{PH}$ es paralelo a $\vec{n}$. Para el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la proyección de $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$H = P - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C).$$

En este caso, $A = 3, B = -2, C = 1, D = -5$ y

$$3(-1) - 2(2) + 6 - 5 = -6, \quad A^2 + B^2 + C^2 = 14.$$

Así,

$$H = P - \frac{-6}{14}(3, -2, 1) = (-1, 2, 6) + \frac{3}{7}(3, -2, 1) = \left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right).$$

El punto simétrico P' está al otro lado del plano y H es el punto medio de PP' ; por tanto, $P' = 2H - P$:

$$P' = 2\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) - (-1, 2, 6) = \left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right).$$

Conclusión. El simétrico de P respecto de π es $P' = (\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7})$.

Pregunta A.4 - Distribución normal y binomial

Sea X la nota global. Tenemos $X \sim N(6, 7, 1, 25)$, donde el segundo parámetro es la desviación típica. Para usar la tabla tipificamos mediante $Z = (X - \mu)/\sigma$, con $Z \sim N(0, 1)$.

a) Servicio excelente

La nota debe ser mayor que 7,5. Tipificando este valor,

$$z = \frac{7,5 - 6,7}{1,25} = 0,64.$$

Por tanto,

$$P(X > 7,5) = P(Z > 0,64) = 1 - P(Z < 0,64) = 1 - 0,7389 = 0,2611.$$

Conclusión. La probabilidad de que un usuario considere excelente el servicio es 0,2611.

b) Servicio satisfactorio

La nota satisfactoria se encuentra entre 5 y 7,5. Los valores tipificados son

$$z_1 = \frac{5 - 6,7}{1,25} = -1,36, \quad z_2 = \frac{7,5 - 6,7}{1,25} = 0,64.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 7,5) &= P(-1,36 \leq Z \leq 0,64) \\ &= P(Z \leq 0,64) - P(Z \leq -1,36) \\ &= 0,7389 - (1 - 0,9131) = 0,6520. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que el servicio resulte satisfactorio es 0,6520.

c) Al menos dos usuarios insatisfechos

La probabilidad de que una persona esté insatisfecha es

$$p = P(X < 5) = P(Z < -1,36) = 1 - 0,9131 = 0,0869.$$

Si Y cuenta los usuarios insatisfechos entre los 25 elegidos, las respuestas son independientes y la probabilidad p es la misma para todos. Por eso $Y \sim \text{Binomial}(25, 0,0869)$. Usamos el complementario de "al menos dos":

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - (1 - p)^{25} - \binom{25}{1} p(1 - p)^{24} \\ &\approx 0,6518. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad pedida es aproximadamente 0,6518.

Pregunta B.1 - Ecuaciones matriciales

Despejamos X e Y resolviendo el sistema de ecuaciones matriciales como un sistema lineal en esas dos incógnitas:

$$\begin{cases} 5X - 3Y = A, \\ 3X + 6Y = B. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda para eliminar Y , obteniendo $13X = 2A + B$. Para eliminar X , multiplicamos la primera por 3 y la segunda por 5, y restamos: $39Y = 5B - 3A$. Por tanto,

$$X = \frac{2A + B}{13}, \quad Y = \frac{5B - 3A}{39}.$$

Con las matrices dadas:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 39 & 0 \\ -13 & 13 \end{pmatrix}, \quad 5B - 3A = \begin{pmatrix} 195 & 13 \\ -78 & 65 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

La inversa de X existe si $\det X \neq 0$. Como $\det X = 3$,

$$X^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Estas son las matrices X , Y y X^{-1} .

b) Potencia A^{127}

Calculamos las primeras potencias para detectar el ciclo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad A^4 = (-I)^2 = I.$$

Por tanto, las potencias se repiten cada cuatro exponentes. Como $127 = 4 \cdot 31 + 3$, se tiene $A^{127} = A^3$. En particular,

$$A^3 = A^2 A = (-I)A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $A^{127} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pregunta B.2 - Monotonía y área

La función $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$ está definida para todo real, porque $x^2 + 1 > 0$. Para derivar, escribimos el valor absoluto por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1}, & x < 0, \\ \frac{x}{x^2+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Crecimiento y extremos

En cada tramo el signo de la derivada indica el crecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, & x < 0, \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 1$; además estudiamos $x = 0$, donde cambia la expresión. Los denominadores son positivos, así que usamos los numeradores y probamos un valor en cada intervalo: en $(-\infty, -1)$, $x = -2$ da $f'(x) > 0$; en $(-1, 0)$, $x = -\frac{1}{2}$ da $f'(x) < 0$; en $(0, 1)$, $x = \frac{1}{2}$ da $f'(x) > 0$; y en $(1, \infty)$, $x = 2$ da $f'(x) < 0$. Por tanto, la función crece, decrece, vuelve a crecer y vuelve a decrecer, respectivamente. En $x = 0$ hay un mínimo relativo, pues $f(0) = 0$ y $f(x) \geq 0$; en $x = \pm 1$, el cambio de signo de positivo a negativo da máximos relativos, con valor $f(\pm 1) = \frac{1}{2}$. **Conclusión.** Hay máximos relativos en $(-1, \frac{1}{2})$ y $(1, \frac{1}{2})$, y un mínimo relativo en $(0, 0)$.

b) Área entre la curva y $y = \frac{1}{2}$

La recta y la gráfica se cortan cuando

$$\frac{|x|}{x^2+1} = \frac{1}{2} \iff 2|x| = x^2+1.$$

Para $x \geq 0$, se obtiene $(x-1)^2 = 0$, luego $x = 1$; para $x < 0$, $-2x = x^2+1$, esto es $(x+1)^2 = 0$, luego $x = -1$. En $[-1, 1]$, la recta queda por encima de la curva, que es simétrica respecto del eje Y. Por ello, el área total es

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 \\ &= 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusión. El área encerrada es $1 - \ln 2$ unidades cuadradas.

Pregunta B.3 - Geometría en el espacio

El plano dado en forma paramétrica pasa por $Q = (2, 2, 0)$ y tiene vectores directores

$$\vec{u} = (-1, 0, 1), \quad \vec{v} = (0, 2, -2).$$

Un vector normal es su producto vectorial:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = (-2, -2, -2),$$

que podemos simplificar a $(1, 1, 1)$. Por tanto, la ecuación general del plano es

$$x + y + z - 4 = 0.$$

El rayo comienza en $A = (1, 0, -1)$ y tiene dirección

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1).$$

a) Plano de incidencia

El plano de incidencia contiene el rayo, por lo que su normal debe ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Además, al ser perpendicular a π , su normal debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$. Un vector perpendicular a ambos es

$$\vec{n}_I = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_\pi = (2, 1, 1) \times (1, 1, 1) = (0, -1, 1).$$

El plano con ese normal que pasa por A cumple

$$0(x - 1) - (y - 0) + (z + 1) = 0.$$

Conclusión. El plano de incidencia es $y - z - 1 = 0$.

b) Distancia del emisor al punto de incidencia

El punto de incidencia se obtiene intersectando el rayo $A + t(2, 1, 1)$ con π :

$$(1 + 2t) + (t) + (-1 + t) = 4 \implies 4t = 4 \implies t = 1.$$

Así, $P = A + (2, 1, 1) = B = (3, 1, 0)$. La distancia desde el emisor es

$$AP = |t| |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Conclusión. El rayo recorre $\sqrt{6}$ unidades hasta el plano.

c) Giro para minimizar la distancia al plano

El punto del plano más cercano a A es el pie de la perpendicular desde A . Por eso, para que el nuevo rayo llegue a ese punto, debe apuntar en la dirección normal $(1, 1, 1)$. El ángulo θ que hay que girar es el ángulo entre la dirección original $(2, 1, 1)$ y esa normal:

$$\cos \theta = \frac{(2, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Conclusión. Debe girar $\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 19,47^\circ$.

Pregunta B.4 - Probabilidad condicionada

Denotemos por C , H y T los sucesos «cuento», «novela histórica» y «manual técnico», y por F e I los sucesos «libro en francés» y «libro en inglés». Las categorías son incompatibles y cubren todos los libros:

$$P(C) = 0,5, \quad P(H) = 0,3, \quad P(T) = 0,2.$$

Además, $P(F | C) = \frac{1}{5}$, $P(I | H) = \frac{1}{3}$ y $P(T | F) = \frac{1}{7}$.

a) Probabilidad de francés sabiendo que no es manual

Sea $q = P(F)$. Por la probabilidad total,

$$q = P(F \cap C) + P(F \cap H) + P(F \cap T) = 0,5 \cdot \frac{1}{5} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{q}{7}.$$

El término $q/7$ aparece porque $P(T | F) = P(F \cap T)/P(F) = 1/7$. Resolviendo,

$$\frac{6}{7}q = 0,3 \quad \Rightarrow \quad q = 0,35 = \frac{7}{20}.$$

Entonces $P(F \cap T) = q/7 = 0,05$, y

$$P(F | \bar{T}) = \frac{P(F \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,35 - 0,05}{0,8} = \frac{3}{8}.$$

Conclusión. $P(F | \bar{T}) = \frac{3}{8} = 0,375$.

b) Probabilidad de francés y probabilidad de novela si es inglés

La probabilidad de que un libro esté en francés ya se ha calculado: $P(F) = 0,35$. Para la probabilidad pedida condicionada a que esté en inglés, usamos

$$P(H | I) = \frac{P(H \cap I)}{P(I)}.$$

En las novelas, un tercio está en inglés, así que $P(H \cap I) = 0,3 \cdot \frac{1}{3} = 0,1$. Como cada libro está en francés o en inglés, $P(I) = 1 - 0,35 = 0,65$. Por tanto,

$$P(H | I) = \frac{0,1}{0,65} = \frac{2}{13}.$$

Conclusión. $P(F) = 0,35$ y $P(H | I) = \frac{2}{13} \approx 0,1538$.