Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2015--2016 · Modelo 3

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Ecuación y productos de matrices

a) Si A es de orden $m \times n$, entonces A^tA es de orden $n \times n$. Para que $(A^tA)X$ pueda igualarse a I_n, la matriz X debe tener n filas y n columnas. Por tanto, X es cuadrada de orden n.

b) En este caso,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $(A^tA)X = I_2$ se puede despejar si A^tA es invertible. Como su determinante vale $9 - 1 = 8 \neq 0$,

$$X = (A^tA)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) El producto $A(A^tA)$ está definido: A es 3×2 y A^tA es 2×2, de modo que el resultado será 3×2. Calculamos:

$$A(A^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A(A^tA) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y tangente

La función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} + 1, & x \leq 2, \\ x + a, & x > 2, \end{cases} \qquad a > 0.$$

Cada expresión es continua en su tramo, así que el único punto que debemos estudiar para la continuidad es $x = 2$. El valor de la función en ese punto lo da la primera rama:

$$f(2) = \frac{4}{a} + 1, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 + a.$$

Para que haya continuidad, ambos valores deben coincidir:

$$\frac{4}{a} + 1 = 2 + a \quad \Longrightarrow \quad a^2 + a - 4 = 0.$$

Las soluciones son $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Como el enunciado exige $a > 0$, queda

$$a = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Para que también fuese derivable en $x = 2$, las derivadas laterales tendrían que coincidir. Son

$$f'_-(2) = \frac{2 \cdot 2}{a} = \frac{4}{a}, \qquad f'_+(2) = 1.$$

La igualdad exigiría $a = 4$, distinto del valor que hace continua la función; por tanto, para el valor hallado no es derivable en $x = 2$.

b) Para $a = 4$ la función queda

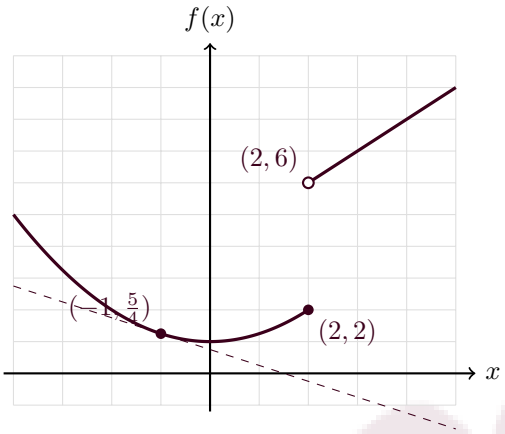
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + 1, & x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

Su gráfica es una parábola hasta $x = 2$, incluido el punto $(2, 2)$, y una recta para $x > 2$, que comienza con un punto abierto en $(2, 6)$. Para la tangente en $x = -1$ usamos el valor y la derivada de la primera rama:

$$f(-1) = \frac{5}{4}, \qquad f'(x) = \frac{x}{2}, \qquad f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Con la ecuación punto-pendiente,

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}(x + 1) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$



$a = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$; con ese valor es continua, pero no derivable en $x = 2$; $y_{\text{tangente}} = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$.

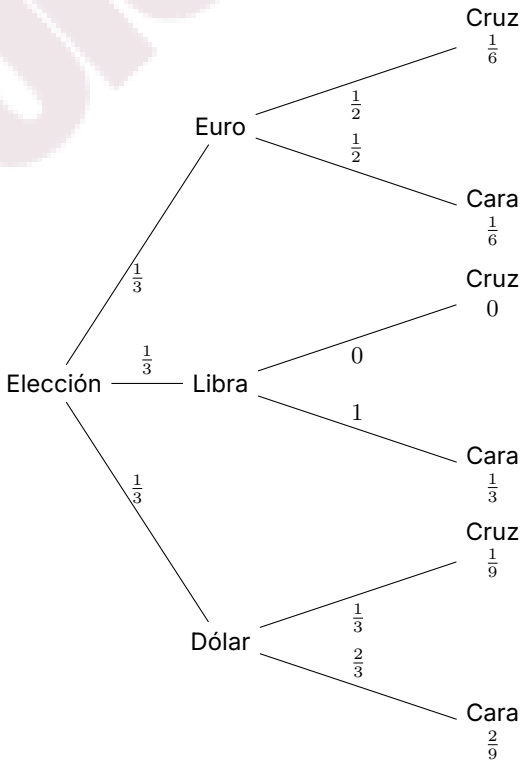
Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Se elige cada moneda con probabilidad $1/3$. Llamamos D, L y E a elegir, respectivamente, la moneda de dólar, libra y euro; C representa obtener cara y X, cruz. En la moneda de dólar, si $P(C \mid D)$ es el doble de $P(X \mid D)$ y ambas probabilidades suman uno, entonces

$$P(X \mid D) = \frac{1}{3}, \qquad P(C \mid D) = \frac{2}{3}.$$

La moneda de libra tiene dos caras, mientras que la de euro es equilibrada:

$$P(C \mid L) = 1, \quad P(X \mid L) = 0, \quad P(C \mid E) = P(X \mid E) = \frac{1}{2}.$$



Las etiquetas de las hojas son las probabilidades conjuntas: se obtiene cada una multiplicando las probabilidades de las ramas del camino. **a)** Para calcular la probabilidad total de cara, sumamos las probabilidades de los caminos que terminan en cara. En cada camino se multiplican las probabilidades sucesivas:

$$P(C) = P(D)P(C \mid D) + P(L)P(C \mid L) + P(E)P(C \mid E) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{18}.$$

b) Sabiendo que salió cruz, queremos invertir la condición para averiguar qué moneda se había escogido. Solo las monedas de dólar y euro pueden dar cruz:

$$P(X) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

Por Bayes,

$$P(D \mid X) = \frac{P(D \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{18}} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{P(\text{cara}) = \frac{13}{18}; \qquad P(\text{dólar} \mid \text{cruz}) = \frac{2}{5}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para la media

La media poblacional se estima con un intervalo bilateral porque se pide un intervalo de confianza. Como la desviación típica poblacional es conocida ($\sigma = 50$), usamos

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

La media de los diez datos es

$$\bar{x} = \frac{682 + 553 + 555 + 666 + 657 + 649 + 522 + 568 + 700 + 552}{10} = \frac{6104}{10} = 610{,}4.$$

Para un nivel de confianza del 95%, $z_{0{,}975} \approx 1{,}96$. El error máximo es

$$E = 1{,}96\frac{50}{\sqrt{10}} \approx 30{,}99.$$

Por tanto,

$$IC_{95\%}(\mu) = 610{,}4 \pm 30{,}99 \approx [579{,}41,\ 641{,}39] \text{ entradas mensuales.}$$

b) El error máximo del intervalo es su semiamplitud: aproximadamente $30{,}99$ entradas.

$$\boxed{IC_{95\%}(\mu) \approx [579{,}41,\ 641{,}39]; \qquad E \approx 30{,}99 \text{ entradas.}}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Operaciones y ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Para que un producto de matrices exista, el número de columnas de la primera debe coincidir con el de filas de la segunda.

- AB no está definido: las dimensiones interiores son 2 y 1.
- BA sí está definido, y es una matriz 1×2:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

- BC sí está definido y es de orden 1×1:

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

- C^tB^t también es un producto 1×2 por 2×1:

$$C^tB^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

b) En $AX + B^t = 4C$, despejamos primero $AX = 4C - B^t$. Como A es invertible (det $A = 6 \neq 0$), multiplicamos por A^{-1} a la izquierda. Además, X ha de ser una matriz 2×1 para que los productos y la suma estén definidos:

$$4C - B^t = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = A^{-1}(4C - B^t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

$$AB \text{ no existe}; \quad BA = (9,6), \quad BC = C^tB^t = (5); \qquad X = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad, monotonía y curvatura

La función es

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x \leq 2,\\ x^2 - 2x + 2, & x > 2.\end{cases}$$

La primera rama no está definida en $x = 0$ y la segunda solo se aplica para $x > 2$. Por tanto, el dominio es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Para estudiar la continuidad en el punto de unión $x = 2$, calculamos el valor y los límites laterales:

$$f(2) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{4}{x} = 2, \qquad \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 2x + 2) = 2.$$

Coinciden, de modo que la función es continua en $x = 2$ y, por ser continua en cada tramo de su dominio, en todo su dominio.

Las derivadas laterales en el punto de unión son

$$f'_-(2) = -\frac{4}{x^2}\bigg|_{x=2} = -1, \qquad f'_+(2) = (2x-2)|_{x=2} = 2.$$

Como no coinciden, la función no es derivable en $x = 2$.

b) Para $x > 0$, estudiamos el signo de la derivada en cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases}-\dfrac{4}{x^2} < 0, & 0 < x < 2,\\ 2x - 2 > 0, & x > 2.\end{cases}$$

Así, decrece en $(0, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$. Al pasar de decreciente a creciente, alcanza un mínimo en $x = 2$, cuyo valor es $f(2) = 2$.

La curvatura se determina con la segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases}\dfrac{8}{x^3} > 0, & 0 < x < 2,\\ 2 > 0, & x > 2.\end{cases}$$

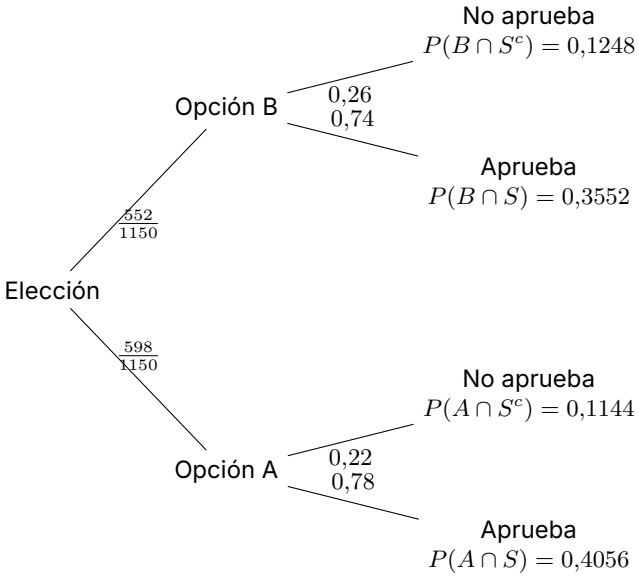
La derivada es creciente en cada tramo y salta de -1 a 2 al pasar por $x = 2$. Por ello, la función es convexa en $(0, +\infty)$, aunque no sea derivable en el punto de unión.

Continua en el dominio y no es derivable en $x = 2$;
decrece en $(0, 2)$ y crece en $(2, \infty)$, $\quad f_{\text{min}} = 2$ en $x = 2$;
convexa en $(0, +\infty)$.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y probabilidad condicionada

Sean A el suceso «elegir la opción A» y S el suceso «aprobar Geografía». De los 1150 alumnos, 598 eligieron A y $1150 - 598 = 552$ eligieron B. Por tanto,

$$P(A) = \frac{598}{1150}, \qquad P(B) = \frac{552}{1150}, \qquad P(S \mid A) = 0{,}78, \qquad P(S \mid B) = 0{,}74.$$



En cada camino multiplicamos la probabilidad de elegir la opción por la probabilidad condicionada del resultado; para el suceso «aprobar» sumamos las dos hojas incompatibles correspondientes. **a)** Sumamos las probabilidades de los dos caminos incompatibles que llevan a aprobar:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A)P(S \mid A) + P(B)P(S \mid B) \\ &= \frac{598}{1150} \cdot 0{,}78 + \frac{552}{1150} \cdot 0{,}74 = 0{,}7608. \end{aligned}$$

b) Para hallar la opción elegida sabiendo que aprobó, usamos la probabilidad condicionada:

$$P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{598}{1150} \cdot 0{,}78}{0{,}7608} = \frac{169}{317} \approx 0{,}5331.$$

$$\boxed{P(\text{aprobar}) = 0{,}7608; \qquad P(A \mid \text{aprobar}) = \frac{169}{317} \approx 0{,}5331.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una proporción

Sea p la proporción actual de nacimientos con luna llena. La afirmación del estudio es que la proporción ha descendido respecto de $0{,}45$, por lo que planteamos un contraste de cola izquierda:

$$H_0 : p \geq 0{,}45, \qquad H_1 : p < 0{,}45.$$

Sea X el número de nacimientos con luna llena en la muestra. Si cada nacimiento se considera un ensayo con probabilidad p de éxito, $X \sim \text{Binomial}(200, p)$. En la muestra, $n = 200$ y se observa $x = 70$, así que la proporción es

$$\widehat{p} = \frac{70}{200} = 0{,}35.$$

Bajo la hipótesis frontera $p_0 = 0{,}45$, el estadístico tipificado es

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0{,}35 - 0{,}45}{\sqrt{0{,}45 \cdot 0{,}55/200}} \approx -2{,}843.$$

Para un nivel de significación del 1%, el valor crítico de cola izquierda es $z_{0{,}01} \approx -2{,}326$. La región de rechazo se expresa como

$$Z < -2{,}326 \iff \widehat{p} < 0{,}45 - 2{,}326\sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{200}} \approx 0{,}3682.$$

Como $0{,}35 < 0{,}3682$ (equivalentemente, se observaron $70 \leq 73$ nacimientos con luna llena), rechazamos H_0. Al nivel del 1%, los datos respaldan la afirmación de que la proporción ha descendido.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Región de rechazo: } \widehat{p} < 0{,}3682 \ (X \leq 73); \\ \widehat{p} = 0{,}35 : \ \text{se rechaza } H_0.\end{array}}$$