

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2024–2025 · Examen titular B

Se desarrollan todos los ejercicios de los cuatro bloques, incluidas las alternativas, desde el enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Sistemas y ecuaciones matriciales

a) **Potencia de cada modelo.** Sean x, y, z las potencias individuales, en vatios, de las placas A, B y C. Cada ensayo proporciona una ecuación al sumar las contribuciones de las placas utilizadas:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2960, \\ x + 3y + 2z = 2990, \\ 3x + 2y + z = 2870. \end{cases}$$

En forma matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2960 \\ 2990 \\ 2870 \end{pmatrix}.$$

Para saber si se pueden determinar las tres potencias, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = 2(3 - 4) - (1 - 6) + 3(2 - 9) = -18 \neq 0.$$

El sistema tiene solución única. Para resolverlo, eliminamos x entre la primera y la segunda ecuación, y entre la primera y la tercera:

$$5y + z = 3020, \quad y - 7z = -3140.$$

De la segunda, $y = -3140 + 7z$. Al sustituir en la primera,

$$5(-3140 + 7z) + z = 3020 \implies 36z = 18720 \implies z = 520.$$

Entonces $y = 500$, y la primera ecuación da $2x + 500 + 3(520) = 2960$, de donde $x = 450$. Estos valores satisfacen las tres ecuaciones.

$$x = 450 \text{ W}, \quad y = 500 \text{ W}, \quad z = 520 \text{ W}.$$

b) **Ecuación matricial.** Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como $M^2 = I_2$, la ecuación del enunciado $2X = M^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ queda

$$2X = I_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo los dos componentes entre 2:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Programación lineal: consumo de agua

Sean x e y las unidades de lechuga iceberg y romana. Las condiciones del cultivo se traducen en

$$x \geq \frac{y}{2}, \quad x \leq 1500, \quad 900 \leq x + y \leq 2400, \quad x, y \geq 0.$$

Queremos minimizar los litros de agua

$$W(x, y) = 15x + 18y.$$

Como $18 = 15 + 3$, podemos expresar el consumo como

$$W = 15(x + y) + 3y.$$

Dado que $x + y \geq 900$ e $y \geq 0$, resulta $W \geq 15 \cdot 900 = 13\,500$. Esta cota se alcanza con $(x, y) = (900, 0)$, que cumple también el límite $x \leq 1500$ y la proporción mínima exigida. Por tanto, ese punto es el mínimo factible.

$$900 \text{ unidades de iceberg y } 0 \text{ de romana; } W_{\min} = 13\,500 \text{ litros.}$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Capital invertido

La función del capital, en euros, es

$$f(t) = \begin{cases} 5000(1 + 0,05t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 5000 \cdot 1,05^t, & t > 1. \end{cases}$$

a) Tiempo para obtener 5931,10 €. Este capital supera los 5250 € del primer tramo, así que usamos la expresión exponencial y despejamos el exponente mediante logaritmos:

$$5000 \cdot 1,05^t = 5931,10 \implies t = \frac{\ln(5931,10/5000)}{\ln(1,05)} \approx 3,5001 \text{ años.}$$

b) Intereses entre los años 2 y 4. Los intereses de ese periodo son la diferencia entre el capital final y el inicial:

$$I = f(4) - f(2) = 5000(1,05^4 - 1,05^2) = 565,03125 \text{ €.}$$

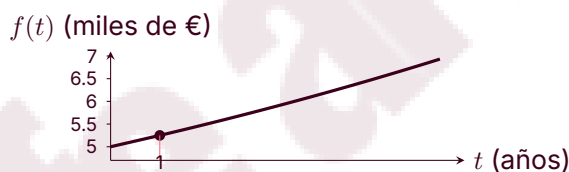
c) Continuidad y derivabilidad en $t = 1$. Los tramos solo pueden presentar problemas en el punto de unión. Los valores laterales coinciden:

$$f(1) = 5000(1 + 0,05) = 5250, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 5000 \cdot 1,05 = 5250.$$

La función es continua en $t = 1$. Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

$$f'_-(1) = 5000 \cdot 0,05 = 250, \quad f'_+(1) = 5000 \cdot 1,05 \ln(1,05) = 5250 \ln(1,05) \approx 256,15.$$

Como no coinciden, no es derivable en ese punto. **d) Monotonía y gráfica.** En el primer tramo $f'(t) = 250 > 0$; en el segundo, $f'(t) = 5000 \cdot 1,05^t \ln(1,05) > 0$. Por tanto, el capital aumenta en todo su dominio. La gráfica enlaza continuamente el tramo lineal con el exponencial en $(1, 5250)$; allí cambia la pendiente.



$t \approx 3,5001$ años; $I_{2 \rightarrow 4} = 565,03125$ €; f es continua y creciente, pero no derivable en $t = 1$.

Bloque C

Ejercicio 4 · Probabilidad de aprobar asignaturas

Sean H «aprobar Historia» y M «aprobar Matemáticas». Se conocen $P(H) = 0,50$, $P(M) = 0,70$ y $P(H \cap M) = 0,30$. **a) Aprobar solo una.** Sumamos los casos «solo Historia» y «solo Matemáticas»:

$$P(H \cap M^c) + P(H^c \cap M) = (0,50 - 0,30) + (0,70 - 0,30) = 0,60.$$

b) No aprobar más de una. Esto significa aprobar como máximo una, que es el suceso complementario de aprobar ambas:

$$P((H \cap M)^c) = 1 - 0,30 = 0,70.$$

c) Historia sabiendo que ha suspendido Matemáticas. Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(H \mid M^c) = \frac{P(H \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{0,50 - 0,30}{1 - 0,70} = \frac{2}{3}.$$

d) Independencia e incompatibilidad. Serían independientes si $P(H \cap M) = P(H)P(M)$, pero $0,30 \neq 0,50 \cdot 0,70 = 0,35$. No son independientes. Tampoco son incompatibles, pues la probabilidad de que se aprueben ambas es positiva.

$$\begin{aligned} P(\text{solo una}) &= 0,60; & P(\text{como máximo una}) &= 0,70; \\ P(H \mid M^c) &= \frac{2}{3}; & H, M &\text{ dependientes y compatibles.} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 · Probabilidad total y condicionada

Las proporciones de alumnos en los autobuses son

$$P(A) = \frac{4}{9}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

El 65% de A y el 40% de B no esquían; por tanto, las probabilidades de saber esquiar son 0,35, 0,60 y 1, respectivamente. Definimos S como «saber esquiar». **a)** Sumamos las probabilidades de esquiar en cada autobús, que son casos incompatibles:

$$P(S) = \frac{4}{9}(0,35) + \frac{1}{3}(0,60) + \frac{2}{9}(1) = \frac{26}{45} \approx 0,5778.$$

b) Usamos la probabilidad condicionada para invertir la condición:

$$P(C | S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{26}{45}} = \frac{5}{13}.$$

c) «Saber esquiar y no viajar en B» reúne los casos de A y C:

$$P(S \cap B^c) = P(A \cap S) + P(C \cap S) = \frac{4}{9}(0,35) + \frac{2}{9} = \frac{17}{45}.$$

$P(S) = \frac{26}{45};$	$P(C S) = \frac{5}{13};$	$P(S \cap B^c) = \frac{17}{45}.$
-------------------------	----------------------------	----------------------------------

Bloque D

Ejercicio 6 · Intervalo de confianza para una proporción

Para un intervalo de una proporción, el centro es la proporción muestral y el error es la semiamplitud. A partir del intervalo (0,5616, 0,7184):

$$\hat{p} = \frac{0,5616 + 0,7184}{2} = 0,64, \quad E = \frac{0,7184 - 0,5616}{2} = 0,0784, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,36.$$

Con confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$, y la fórmula del error es $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$. Despejamos n :

$$n = \frac{1,96^2 \cdot 0,64 \cdot 0,36}{0,0784^2} = 144.$$

La amplitud total es $2E$; al aumentar n , el error y la amplitud disminuyen porque aparecen divididos por $\sqrt{n}$.

$\hat{p} = 0,64;$	$E = 0,0784;$	$n = 144;$	al aumentar n , disminuye la amplitud.
-------------------	---------------	------------	--

Ejercicio 7 · Distribución de la media muestral

La duración individual es normal con media $\mu = 10,5$ días y desviación típica $\sigma = 1,5$ días. Para muestras de tamaño $n = 25$, la media muestral también es normal, con

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 10,5, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,5}{5} = 0,3.$$

Por tanto, $\bar{X}$ sigue una normal de media 10,5 y desviación típica 0,3 días. **a)** Estandarizamos el límite de 10 días:

$$P(\bar{X} > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 10,5}{0,3}\right) = P(Z > -1,67) = \Phi(1,67) \approx 0,9522.$$

b) Para que la media esté entre 8 y 11 días, transformamos ambos límites a la normal tipificada:

$$P(8 < \bar{X} < 11) = P\left(\frac{8 - 10,5}{0,3} < Z < \frac{11 - 10,5}{0,3}\right) = P(-8,33 < Z < 1,67) \approx 0,9522.$$

La probabilidad de quedar por debajo de $-8,33$ es prácticamente nula, por eso el resultado coincide a cuatro decimales con el del apartado anterior. En porcentaje, aproximadamente el 95,22% de las muestras cumplen la condición.

$\bar{X} \sim N(10,5, 0,3);$	$P(\bar{X} > 10) \approx 0,9522;$	$P(8 < \bar{X} < 11) \approx 95,22\%.$
------------------------------	-----------------------------------	--