

PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -a x + y - z = 1 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado. (2 puntos)
- Las soluciones del sistema cuando $a = 3$. (4 puntos)
- Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado. (4 puntos)

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a - 1 = -a$$

$$-a = 0 \rightarrow a = 0$$

Entonces,

para $a \neq 0$, $|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y, como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$, por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

para $a = 0$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A' podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2×3 , el máximo rango de A será 2),

$$\left. \begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' también sería 2 (A' es 2×4) $\rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Por tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

Respondamos a las preguntas,

a) Según lo estudiado al principio **el sistema es compatible determinado para $a \neq 0$.**

b) Solución para $a = 3$

Si $a = 3$, $a \neq 0$, por lo que el sistema es compatible determinado

El sistema es
$$\begin{cases} y - z = -2 \\ -x + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.}$$

De lo estudiado al principio, sabemos que $|A| = -a$, por tanto (como $a = 3$) $|A| = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5 + 1 + 2 + 5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1 + 6 - 15 + 2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2 - 15 + 1}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Para $a = 3$ la solución del sistema es: $\{ x = -1, y = 2, z = 4 \}$

c) Según lo estudiado al principio **el sistema es compatible indeterminado para $a = 0$.**

Del estudio realizado inicialmente, para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y (las que determinan el menor de orden dos no nulo).

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} y = -1 + z \\ -x = 5 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = -5 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Finalmente, para $a = 0$ las soluciones del sistema son:

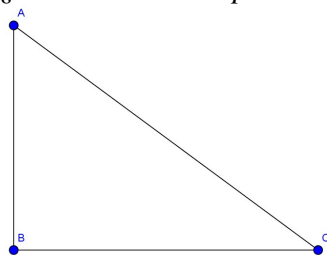
$$\begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA A.2. Dados los puntos $A = (-1, 2, \lambda)$, $B = (2, 3, 5)$ y $C = (3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A , B y C . (3 puntos)
- El área del triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$. (4 puntos)
- La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$. (4 puntos)

Solución:

a) ¿ λ ? / AC sea la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC .



Si AC es la hipotenusa $\rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 5 - \lambda), \quad \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, 1, 5 - \lambda) \cdot (1, 2, -2) = 3 + 2 - 2(5 - \lambda) = 5 - 10 + 2\lambda = -5 + 2\lambda$$

$$-5 + 2\lambda = 0 \rightarrow 2\lambda = 5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

Solución: el segmento AC será la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC para $\lambda = 5/2$.

b) ¿Área del triángulo ABC para $\lambda = 6$? ($A(-1, 2, 6)$, $B(2, 3, 5)$ y $C = (3, 5, 3)$)

Calculamos el área triángulo de vértices A , B y C mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{BC} = (1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 6\vec{j} = 5\vec{j} + 5\vec{k} = (0, 5, 5)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u.a.}$$

c) ¿Plano π que contiene los puntos $A(-1, 2, 6)$, $B(2, 3, 5)$ y $C = (3, 5, 3)$?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(-1, 2, 6) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(3, 1, -1) \\ \overrightarrow{BC}(1, 2, -2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{La ecuación del plano } \pi \text{ será: } \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-6) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)0 - (y-2)(-5) + (z-6)5 = 0 \rightarrow 5y - 10 + 5z - 30 = 0 \rightarrow 5y + 5z - 40 = 0 \rightarrow y + z - 8 = 0$$

$$\text{Por tanto, } \pi: y + z - 8 = 0$$

PROBLEMA A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener, razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, (4 puntos)
- El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$. (4 puntos)

Solución:

a) Dominio de $f(x)$

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Asíntota vertical,

Posibles A.V. $x = 0$ y $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 0 \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es A.V.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y

$$\text{grad}(\text{numerador}) - \text{grad}(\text{denominador}) = 1 - 2 = -1 \neq 1$$

la función no tiene asíntota oblicua

Finalmente, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y

sus asíntotas son $x = 0$, $x = 1$ (asíntotas verticales) e $y = 0$ (asíntota horizontal).

b) Monotonía de $f(x)$.

Estudiamos el signo de $f'(x)$, sabemos que $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

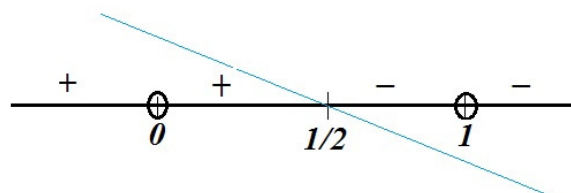
$$f'(x) = \frac{-1(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$-2x + 1 = 0 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(x^2 - x)^2 = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \text{ (resuelta en a)} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$f'(x)$ es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz $1/2$, por tanto:

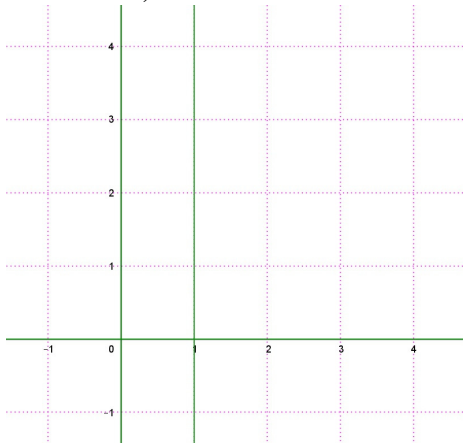


Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ y decreciente en $(1/2, 1) \cup (1, +\infty)$.

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función $f(x)$,

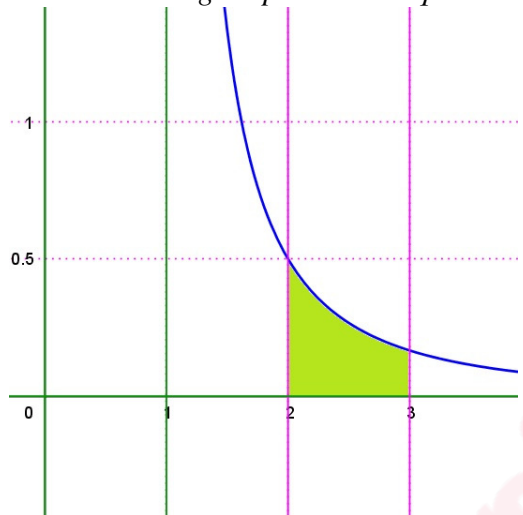
Conocemos sus asíntotas y su



Como el área a calcular está limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 3$; la función es decreciente para $x > 1$ para representar el área basta con calcular la un par de valores de la función, por ejemplo:

x	$f(x)$
2	$\frac{1}{2^2 - 2} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3^2 - 3} = \frac{1}{6}$

Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral

definida: $\int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx$$

Es una integral racional,

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x^2 - x}$$

$$\text{Luego } 1 = A(x-1) + Bx$$

$$\text{para } x = 0 \rightarrow 1 = A(0-1) + B \cdot 0 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1$$

$$\text{para } x = 1 \rightarrow 1 = A(1-1) + B \cdot 1 \rightarrow 1 = B \rightarrow B = 1$$

Como la integral indefinida es para calcular la integral definida, no usamos la constante de integración,

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x| + \ln|x-1|$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} dx &= [-\ln|x| + \ln|x-1|]_2^3 = (-\ln|3| + \ln|3-1|) - (-\ln|2| + \ln|2-1|) = \\ &= (-\ln 3 + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 1) = -\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 - \ln 1 = 2\ln 2 - \ln 3 - 0 = \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 \approx 0.2877 \end{aligned}$$

Solución: el valor del área pedida es $(2\ln 2 - \ln 3)u^2 \approx 0.2877 u^2$.

PROBLEMA B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$. (3 puntos)
- Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. (4 puntos)
- El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2. (3 puntos)

Solución:

A es una matriz cuadrada / $A^2 + 2A = 3I$. Comprobemos que existe A^{-1}

$$A^2 + 2A = 3I \rightarrow A(A + I) = 3I \rightarrow A \left[\frac{1}{3}(A + I) \right] = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(A + I)$$

- a) ¿ $a, b / A^{-1} = aA + bI$?

Partimos de $A^2 + 2A = 3I$.

multiplicamos por la derecha por A^{-1} , $A^2 A^{-1} + 2A A^{-1} = 3I A^{-1} \rightarrow A(A A^{-1}) + 2A A^{-1} = 3I A^{-1}$

$$AI + 2I = 3A^{-1} \rightarrow A + 2I = 3A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.

- b) ¿ $\alpha, \beta / A^4 = \alpha A + \beta I$?

Partimos de $A^2 + 2A = 3I \rightarrow A^2 = 3I - 2A$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (3I - 2A) \cdot (3I - 2A) = 9II - 6IA - 6IA + 4A^2 = 9I - 6A - 6A + 4A^2 = 9I - 12A + 4A^2 = 9I - 12A + 4(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21I$$

Por tanto, $\alpha = -20$ y $\beta = 21$.

- c) $|2B^{-1}|$, sabiendo que B es 3×3 y $|B| = 2$

Calculemos $|2B^{-1}|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \quad \text{y} \quad |nB| = n^3 |B| \quad (\text{por ser } B \text{ } 3 \times 3)$$

$$|2B^{-1}| = 2^3 |B^{-1}| = 8 \frac{1}{|B|} = 8 \frac{1}{2} = 4$$

Solución: $|2B^{-1}| = 4$

PROBLEMA B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La recta s que corta a la recta r , pasa por el punto A , y es perpendicular a la recta r (4 puntos)
- La distancia del punto A a la recta r . (3 puntos)
- La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r . (2 puntos)

Solución:

a) ¿recta s ? / s corta a r , $A \in s$ y $s \perp r$

s corta a r en el punto P_r , por tanto la recta s pasa por A y P_r

Como $s \perp r \rightarrow \overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r}$, $\left(\overrightarrow{v_r} \text{ es el vector director de la recta } r \right)$

$$A(5, 7, 3) \text{ y } P_r(3 - \lambda, -1 + 3\lambda, 2\lambda) \rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (-2 - \lambda, -8 + 3\lambda, -3 + 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r} \rightarrow (-2 - \lambda, -8 + 3\lambda, -3 + 2\lambda) \cdot (-1, 3, 2) = 0$$

$$2 + \lambda - 24 + 9\lambda - 6 + 4\lambda = 0 \rightarrow -28 + 14\lambda = 0 \rightarrow 14\lambda = 28 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow P_r(1, 5, 4)$$

La recta s que pasa por A y P_r , $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP_r} = (4, 2, -1)$, por tanto

$$s: \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

b) ¿ $d(A, r)$?

El cálculo de esta distancia es: $d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|}$

$A(5, 7, 3)$
$P_r(3, -1, 0)$
$\overrightarrow{AP_r}(-2, -8, -3)$
$\overrightarrow{v_r}(-1, 3, 2)$

$$\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-16 + 9) - \vec{j}(-4 - 3) + \vec{k}(-6 - 8) = \vec{i}(-7) - \vec{j}(-7) + \vec{k}(-14) = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 14\vec{k} = (-7, 7, -14)$$

$$|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{v_r}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{Finalmente, } d(A, r) = \frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21} \text{ u.}$$

c) ¿ $d(B, \pi)$? / siendo: $B(1, 1, 1)$ y π un plano $\left\{ \begin{array}{l} \text{pasa por } (3, -1, 0) \\ \perp r \end{array} \right.$

Ecuación del plano π :

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \rightarrow \pi: -x + 3y + 2z + C = 0$

Como $(3, -1, 0) \in \pi \rightarrow -3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + C = 0 \rightarrow -6 + C = 0 \rightarrow C = 6$

Por tanto, $\pi: -x + 3y + 2z + 6 = 0$

$$\text{Finalmente, } d(B, \pi) = \frac{|-1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7} \rightarrow d(B, \pi) = \frac{5\sqrt{14}}{7} u.$$

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x , se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

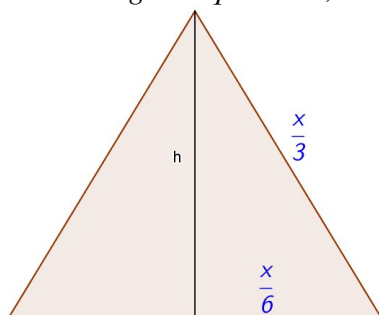
- La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$. (4 puntos)
- El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor. (3 puntos)
- El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido. (3 puntos)

Solución:

Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes.

Con una de ellas, de longitud x , se construye un triángulo equilátero [de lado $x/3$]
y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado [de lado $(100 - x)/4$]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + h^2 \rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{36} + h^2 \rightarrow h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{36} \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{36} \rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

(como h es una longitud, $h > 0$)

$$\text{Luego, } A_T = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 = \frac{(100 - x)^2}{16}$$

$$\text{Finalmente, la suma de las áreas es } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(100 - x)^2}{16} \quad 0 \leq x \leq 100$$

b) Mínimo de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 2x + \frac{1}{16} \cdot 2(100 - x) \cdot (-1) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8}(100 - x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{100}{8} + \frac{x}{8} = \frac{4\sqrt{3}x - 900 + 9x}{72} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{3} + 9)x - 900}{72}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{(4\sqrt{3} + 9)x - 900}{72} = 0 \rightarrow (4\sqrt{3} + 9)x - 900 = 0 \rightarrow (4\sqrt{3} + 9)x = 900$$

$$x = \frac{900}{4\sqrt{3} + 9} \cong 56'5035 \quad (\in [0, 100])$$

Como $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.

En $x = 56'5035$ hay un mínimo local y como $f(x)$ a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función $f(x)$ alcanza su mínimo para $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} \text{ cm} \cong 56'5035 \text{ cm}$

c) Máximo de $f(x)$:

Como $f(x)$ está definida en un intervalo cerrado, la función alcanza su máximo en el interior del intervalo o en los extremos. En el interior, como hemos obtenido en el apartado anterior, alcanza el mínimo.

Calculemos el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo (para $x = 0$ y $x = 100$)

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 0^2 + \frac{(100-0)^2}{16} = \frac{100^2}{16} = 625$$

$$f(100) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 + \frac{(100-100)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 = 481$$

El máximo de $f(x)$ se alcanza para $x = 0$, en este caso todo el alambre se usa para construir un cuadrado de 25 cm de lado.

Tu Profecia al Rescate