

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{cases}$$
, donde a, b y c son tres

números reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La relación que deben verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible. (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $a = -1, b = 2$ y $c = 3$. (2 puntos)
- La solución del sistema cuando los números a, b y c verifican la relación $a = c = -2b$. (4 puntos)

Solución:

Del sistema $\begin{cases} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{cases}$ obtenemos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$

- a) Para que el sistema sea compatible, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$

Calculemos el rango de A .

Como A es 3×2 , el máximo rango de A será 2.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 5 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \text{por lo tanto } \text{ran}(A) = 2$$

Para que $\text{ran}(A') = 2$, debe cumplirse que $\begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$,

$$\begin{aligned} -8c - a + 10b + 8a - 2b + 5c &= 0 \\ 7a + 8b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, para que el sistema sea compatible la relación entre a, b y c debe ser $7a + 8b - 3c = 0$

- b) Para $a = -1, b = 2$ y $c = 3$.

Comprobemos que el sistema es compatible, $7(-1) + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7 + 16 - 9 = 0$, por lo tanto el sistema es compatible.

Para resolver el sistema usamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado anterior. Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -x - 4y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 10}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 1}{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

Para $a = -1, b = 2$ y $c = 3$, la solución del sistema es $x = 2$ e $y = -1$

c) Si $a = c = -2b$, veamos si cumplen la relación $7a + 8b - 3c = 0$.

$7(-2b) + 8b - 3(-2b) = -14b + 8b + 6b = 0$, la cumple. Luego el sistema será compatible

Según lo realizado en el apartado anterior, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -2b \\ -x - 4y = b \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -2b & 5 \\ b & -4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8b - 5b}{-3} = \frac{3b}{-3} = -b \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -1 & b \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2b - 2b}{-3} = \frac{0}{-3} = 0 \end{aligned}$$

Si $a = c = -2b$, la solución del sistema es $x = -b$ e $y = 0$.

Tu Profecia al Rescate

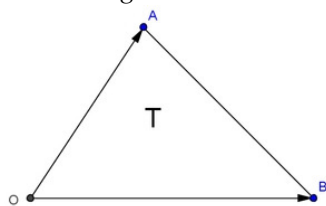
OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Sean $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,0)$ y $C = (0,2,3)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El área del triángulo de vértices O , A y B , (3 puntos) y el volumen del tetraedro de vértices O , A , B y C (2 puntos).
- La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB . (3 puntos)
- La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB , siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C . (2 puntos)

Solución:

a) Área del triángulo OAB



El área de este triángulo es,

$$A_T = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|$$

$$\vec{OA} = (1,0,1) \quad \text{y} \quad \vec{OB} = (2,1,0)$$

Calculemos el producto vectorial,

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1, 2, 1)$$

$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| = |(-1, 2, 1)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Finalmente, } A_T = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u.a.} \approx 1,2247 \text{ u.a.}$$

Volumen del tetraedro $OABC$

Considerando los vectores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$, sabemos que el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo definido por ellos. Como queremos calcular el volumen del tetraedro correspondiente, el cálculo será:

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} |\left[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} \right]| \quad \begin{array}{l} \text{multiplicamos por } \frac{1}{3} \text{ porque } V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} h \\ \text{multiplicamos por } \frac{1}{2} \text{ porque } A_{\text{base Triángulo}} = \frac{1}{2} A_{\text{paralelogramo}} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |3 + 4| = \frac{7}{6} \text{ u.v.}$$

b) Sea π el plano que contiene al triángulo OAB , hay que calcular $d(C, \pi)$.

Obtengamos la ecuación del plano π

$$\text{De este plano conocemos: } \begin{cases} \text{punto } (0,0,0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \vec{u} = \vec{OA} = (1,0,1) \\ \vec{v} = \vec{OB} = (2,1,0) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x(-1) - y(-2) + z \cdot 1 = 0$$

$$-x + 2y + z = 0$$

$$\text{Finalmente, } d(C, \pi) = \frac{|-0 + 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \text{ u.l.}$$

Otra forma de resolverlo.

Utilizando el resultado del apartado a)

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{3} A_b h \quad \begin{cases} A_b = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ obtenido en a)} \\ h = d(C, \pi) \end{cases}$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{7}{6} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{6}}{2} h \rightarrow \frac{7}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} h \rightarrow 7 = \sqrt{6} h \rightarrow h = \frac{7}{\sqrt{6}} \rightarrow d(C, \pi) = \frac{7}{\sqrt{6}} \text{ u.l.}$$

c) Hay que calcular $d(C', \pi)$

$$C' \text{ es el punto medio del segmento } OC, \text{ por lo que } C' = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(0, 1, \frac{3}{2} \right)$$

Como el plano π ya lo calculamos en el apartado anterior,

$$d(C', \pi) = \frac{\left| -0 + 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12} \text{ u.l.}$$

OPCIÓN A

PROBLEMA A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4,5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto $(0,0)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x . (3 puntos)
- El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. (5 puntos)
- Distancia mínima del meteorito al Sol. (2 puntos)

Nota. En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

Solución:

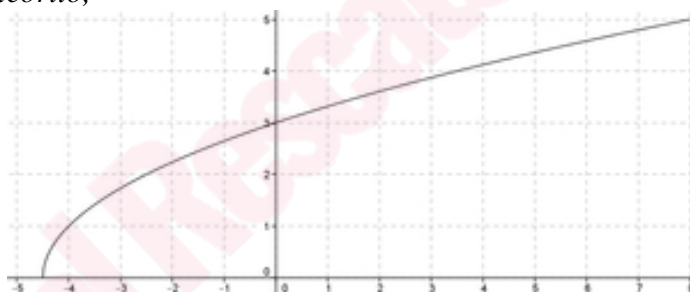
Representemos gráficamente la trayectoria del meteorito,

$$x = -4,5 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = 3$$

$$x = 8 \rightarrow y^2 = 25 \rightarrow y = 5$$

$$(y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3, \text{ pero como } y \geq 0, y = 3)$$



- a) Un punto cualquiera de la trayectoria del meteorito cuya abscisa sea x , será $P(x, \sqrt{2x+9})$.

$$d(P, \text{Sol}) = d((x, \sqrt{2x+9}), (0,0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{2x+9}-0)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$$

$$\text{Luego } d(P, \text{Sol}) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}, \quad -4,5 \leq x \leq 8$$

- b) Buscamos un punto P de la trayectoria / $d(P, \text{Sol})$ sea mínima.

En el apartado anterior hemos obtenido la expresión de la distancia de un punto de la trayectoria al Sol, luego buscamos el mínimo de la función $y = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$, $-4,5 \leq x \leq 8$

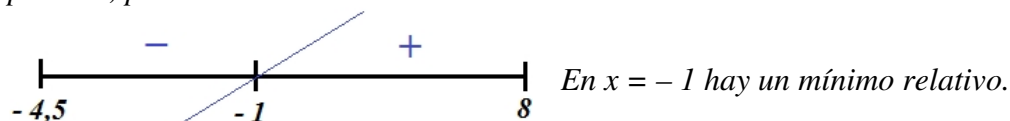
$$y' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}$$

Estudiamos el signo de y'

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$\sqrt{x^2+2x+9}$, como $x^2+2x+9 = (x+1)^2 + 8$, para cualquier valor de x es positivo.

El signo de y' depende del numerador que es un polinomio de 1^{er} grado, raíz -1 y coeficiente de x positivo, por lo tanto:



Como a la izquierda de -1 la función es decreciente y a la derecha creciente, este es el mínimo absoluto.

$$\text{Para } x = -1 \rightarrow y^2 = 2 \cdot (-1) + 9 = 7 \rightarrow y = \sqrt{7}$$

El punto pedido es $(-1, \sqrt{7})$

c) La distancia mínima del meteorito al Sol la obtenemos sustituyendo en la expresión de la distancia obtenida en el apartado a) el valor de x por -1

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{(-1)^2 + 2(-1) + 9} = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8}$$

La distancia mínima del meteorito al Sol es $\sqrt{8}$.

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, obtener

razonadamente el valor de los determinantes siguientes, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) $|A+B|$ y $\left| \frac{1}{2}(A+B)^{-1} \right|$. (4 puntos)

b) $|(A+B)^{-1} A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$. (3 puntos)

c) $|2AB A^{-1}|$ y $|A^3 B^{-1}|$. (3 puntos)

Solución:

a)

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 20 = 24$$

Por las propiedades de los determinantes sabemos que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ y que si A es $n \times n$ $|\alpha A| = \alpha^n |A|$,

$$\left| \frac{1}{2}(A+B)^{-1} \right| = \left(\text{como } (A+B)^{-1} \text{ es } 3 \times 3 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |(A+B)^{-1}| = \frac{1}{8} \frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8} \frac{1}{24} = \frac{1}{192}$$

Solución: $|A+B| = 24$ y $\left| \frac{1}{2}(A+B)^{-1} \right| = \frac{1}{192}$

b) Ahora utilizamos la propiedad que dice que $|A B| = |A| |B|$

$$|(A+B)^{-1} A| = |(A+B)^{-1}| |A| = \frac{1}{|A+B|} |A| = \frac{1}{24} 4 = \frac{1}{6}$$

Del apartado anterior sabemos que $|A+B| = 24$. Calculemos $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$

$$|A^{-1}(A+B)| = |A^{-1}| |A+B| = \frac{1}{|A|} |A+B| = \frac{1}{4} 24 = 6$$

Solución: $|(A+B)^{-1} A| = \frac{1}{6}$ y $|A^{-1}(A+B)| = 6$

c) Calculemos $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$|2 A B A^{-1}| = (\text{como } (A B A^{-1}) \text{ es } 3 \times 3) = 2^3 |A| |B| |A^{-1}| = 8 |A| |B| \frac{1}{|A|} = 8 |B| = 8 (-4) = -32$$

$$|A^3 B^{-1}| = |A^3| |B^{-1}| = |A|^3 \frac{1}{|B|} = 4^3 \frac{1}{-4} = -16$$

Solución: $|2 A B A^{-1}| = -32$ y $|A^3 B^{-1}| = -16$

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (0, -3, 2)$ se pide calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia del punto P al A . (2 puntos)
- La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B . (4 puntos)
- La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A , B y C . (4 puntos)

Solución:

$$a) d(P, A) = \sqrt{(0-1)^2 + (-3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

Respuesta: $d(P, A) = \sqrt{11}$

b) Hay que calcular $d(P, r)$, siendo r la recta que pasa por A y B .

Obtenemos la ecuación de la recta r $\begin{cases} \text{punto } A(1,0,1) \\ \vec{v}_r = \vec{AB} = (2,-1,0) - (1,0,1) = (1,-1,-1) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Para calcular $d(P, r)$ procedemos de la siguiente forma,

Obtenemos el plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r , plano π

Obtenemos el punto de corte entre el plano π y la recta r , punto Q

Y finalmente, $d(P, r) = d(P, Q)$

Plano π

$$\text{Como } \pi \perp r \rightarrow \vec{v}_r \perp \pi \rightarrow \pi: x - y - z + D = 0$$

$$\text{Como } P \in \pi \rightarrow 0 - (-3) - 2 + D = 0 \rightarrow 3 - 2 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

$$\text{La ecuación del plano } \pi \text{ es } x - y - z - 1 = 0$$

Punto Q

$$1 + \lambda - (-\lambda) - (1 - \lambda) - 1 = 0$$

$$1 + \lambda + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0$$

$$3\lambda - 1 = 0$$

$$3\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \rightarrow Q = \left(1 + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d(P, Q) = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-3 - \frac{-1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Respuesta: $d(P, r) = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Otra forma de obtener esta distancia es mediante la fórmula: $d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$, $A \in r$

c) Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

$$\pi : \begin{cases} \text{punto A} \\ \text{vectores directores} \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano π será,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot 1 - y(-1) + (z-1) \cdot 0 = 0$$

$$x-1+y=0 \rightarrow x+y-1=0$$

Por lo que, $d(P, \pi) = \frac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Respuesta: $d(P, \pi) = 2\sqrt{2}$

Tu Profecia al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para cualquier valor real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/6$. (4 puntos)
- La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P . (3 puntos)
- El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). (3 puntos)

Solución:

a) Recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/6$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{punto de la recta } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} \right)$$

$$y' = \cos x \rightarrow m = y'_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{La ecuación de la recta tangente pedida será: } y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$$

b) Recta normal a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{punto de la recta } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Pendiente de la recta tangente, } y' = \cos x \rightarrow m_{r.t.} = y'_{x=\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Como la recta tangente y la recta normal son perpendiculares, se cumple $m_{r.t.} m_{r.n.} = -1$, luego

$$\frac{1}{2} m_{r.n.} = -1 \rightarrow m_{r.n.} = -2$$

$$\text{La ecuación de la recta normal pedida será: } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y = -2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) En el apartado a) hemos obtenido la recta } r: y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \rightarrow \vec{v}_r = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{En el apartado b) hemos obtenido la recta } s: y = -2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \vec{v}_s = (-2, 1)$$

Llamando α al ángulo que forman las rectas r y s ,

$$\cos \alpha = \frac{\left| \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s \right|}{\left| \vec{v}_r \right| \left| \vec{v}_s \right|} = \frac{\left| \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1, -2) \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\left| 1 - \sqrt{3} \right|}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}} \sqrt{1 + 4}} = \left(\text{como } \sqrt{3} > 1 \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{\frac{7}{4}} \sqrt{5}} = 0,247478...$$

Y, finalmente $\alpha = 75'6717^\circ$

Tu Profe al Rescate