

BLOQUE A

PROBLEMA 1. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos máximos.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de paquete	Paquetes de pipas	Chicles	Bombones	Precio de venta
A	1	2	2	1'50 €
B	1	4	1	2 €
Existencias	10	30	18	

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de paquetes del tipo A que confecciona

y = número de paquetes del tipo B que confecciona

Las restricciones serán:

“dispone de 10 paquetes de pipas”; $x + y \leq 10$

“dispone de 30 chicles”; $2x + 4y \leq 30 \rightarrow x + 2y \leq 15$

“dispone de 18 bombones”; $2x + y \leq 18$

Como x e y representan número de paquetes, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in \mathbb{N}$

Los beneficios que obtiene el frutero serán: $1'5x + 2y$

Maximizar $z = 1'5x + 2y$

El problema a resolver es:

$$s.a. \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x + y \leq 10$

(b) $x + 2y \leq 15$

(c) $2x + y \leq 18$

$x + y = 10$

$x + 2y = 15$

$2x + y = 18$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 7,5 \\ 15 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 18 \\ 9 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 7,5 \\ 15 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 18 \\ 9 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 7,5 \\ 15 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 18 \\ 9 & 0 \end{array}$

¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

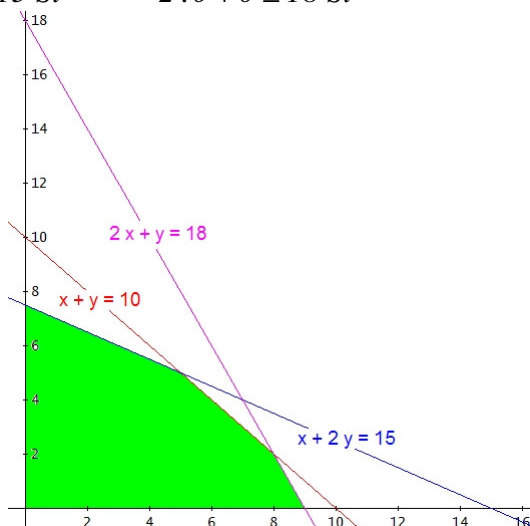
¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 10$ Sí

$0 + 2 \cdot 0 \leq 15$ Sí

$2 \cdot 0 + 0 \leq 18$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Son evidentes los vértices $(0, 0)$, $(0, 7'5)$ y $(9, 0)$; calculemos los otros dos vértices.

De (a) y (b): $(5, 5)$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -10 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $y = 5$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x + 5 = 10$; $x = 5$

De (a) y (c): $(8, 2)$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -10 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $x = 8$

sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $8 + y = 10$; $y = 2$

Los vértices de la región factible son: $(0, 0)$, $(0, 7'5)$, $(9, 0)$, $(5, 5)$ y $(8, 2)$. De estos vértices el $(7'5, 0)$ no tiene sus coordenadas naturales, esperemos que el máximo se alcance en otro de los vértices para que el problema tenga una solución sencilla.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 1'5x + 2y$	
$0, 0$	$1'5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$	
$0, 7'5$	$1'5 \cdot 0 + 2 \cdot 7'5 = 15$	
$9, 0$	$1'5 \cdot 9 + 2 \cdot 0 = 13'5$	
$5, 5$	$1'5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 17'5$	Máximo
$8, 2$	$1'5 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 16$	

El máximo se alcanza en el punto $(5, 5)$ lo cual quiere decir que para maximizar sus ingresos el tendero debe preparar 5 paquetes del tipo A y 5 del tipo B. De esta forma conseguirá un ingreso máximo de 17'50€.

OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximo y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0^2 - 1} = \frac{2}{-1} = -2 \rightarrow (0, -2)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{3x+2}{x^2-1} = 0 \rightarrow 3x+2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{3} \rightarrow \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$$

Hay dos puntos de corte

$$(0, -2) \text{ y } \left(\frac{-2}{3}, 0\right)$$

b) Asíntota horizontal

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x^2-1} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x^2-1} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$ (corresponden a los valores de x que no son del dominio de la función)

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{3 \cdot (-1) + 2}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{3 \cdot 1 + 2}{1^2 - 1} = \frac{5}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical}$$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = \frac{3(x^2-1) - (3x+2)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2 - 4x - 3}{(x^2-1)^2}$$

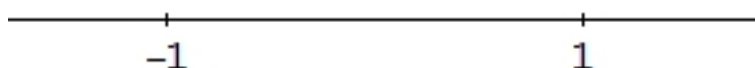
Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador

$$-3x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{6} \text{ sin soluciones reales}$$

Por lo tanto, $-3x^2 - 4x - 3 = -(3x^2 + 4x + 3)$ es siempre negativo.

$$(x^2-1)^2 = 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x = \pm 1 \text{ (visto en el apartado a))}$$

Ahora representamos en la recta real los valores de x obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,



Como el denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de $f'(x)$ sólo depende del signo del numerador que hemos visto que es negativo, esto significa que:

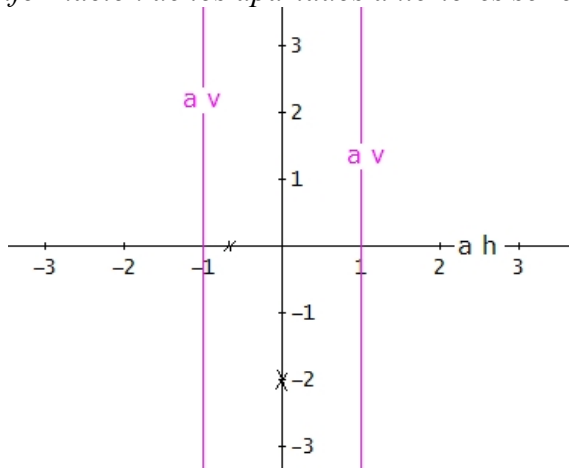


Y por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en su dominio. $f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

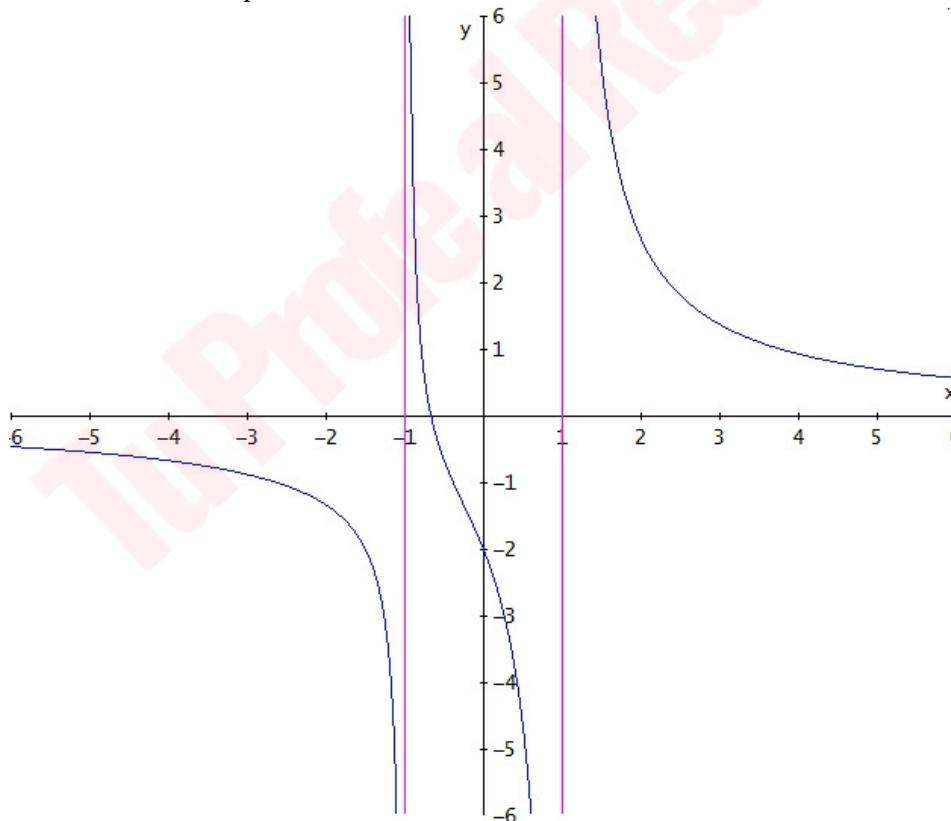
d) Máximos y mínimos locales.

Como $f(x)$ es decreciente en su dominio, la función $f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos locales.

e) La información de los apartados anteriores se resume en (marcamos los puntos de corte y las asíntotas):



Como la función es decreciente, su representación será:



Si no se ve directamente la representación anterior, podemos completar los datos buscando la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

Veámoslo respecto de la asíntota horizontal:

$$\text{en } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow \frac{3(-1000)^2 + 2}{(-1000)^2 - 1} = \frac{-2998}{999999} \approx -0' \dots \quad \text{Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será}$$

$$\text{en } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow \frac{3 \cdot 1000^2 + 2}{1000^2 - 1} = \frac{3002}{999999} \approx 0' \dots$$

OPCIÓN A

PROBLEMA 3. En una cierta empresa de exportación el 62,5% de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80% habla también alemán. Se sabe que sólo la tercera parte de los empleados que no hablan inglés si habla alemán.

- ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?
- ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?
- Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

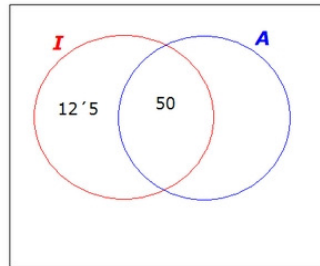
Solución:

De los datos del problema sabemos:

El 62'5% habla inglés (I) y de estos el 80% habla alemán (A), luego hablan alemán e inglés el 80% del 62'5% = 50%.

Luego los que sólo hablan inglés son: 62'5% – 50% = 12'5%

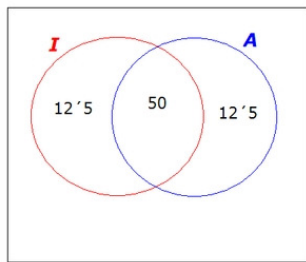
Por ahora sabemos:



De los que no hablan inglés, 100% – 62'5% = 37'5%, la tercera parte habla alemán.

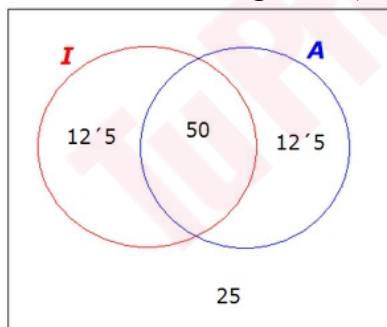
Luego los que sólo hablan alemán son: $\frac{37'5\%}{3} = 12'5\%$.

Por lo que:



Finalmente, no hablan ni alemán ni inglés el $(100 - 12'5 - 50 - 12'5)\% = 25\%$

Es decir:



A partir de estos datos vamos a responder a las preguntas.

- ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? El 50%*
- ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? El $(50 + 12'5)\% = 62'5\%$*
- Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?*

$$P\left(\frac{I}{\bar{A}}\right) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{12'5}{12'5 + 25} = \frac{12'5}{37'5} = \frac{1}{3}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $AB + 3C$ b) Determina la matriz X que verifica $AX + I = D$, donde I es la matriz identidad.*Solución:*

a)

$$AB + 3C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $AX + I = D$ $AX = D - I$, si conocemos A^{-1} ,

$$A^{-1}AX = A^{-1}(D - I)$$

$$X = A^{-1}(D - I)$$

Cálculo de la matriz inversa de A ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa de A :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ cálculo de menores: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ adjuntos: } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ traspuesta: } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(D - I) &= \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{20}{10} & \frac{30}{10} \\ \frac{10}{10} & \frac{-10}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Un ganadero ordeña una vaca desde el día siguiente al día que ésta pare hasta 300 días después del parto. La producción diaria en litros de leche que obtiene de dicha vaca viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{120x - x^2}{5000} + 40$$

donde x representa el número de días transcurridos desde el parto. Se pide:

- El día de máxima producción y la producción máxima.
- El día de mínima producción y la producción mínima.

Solución:

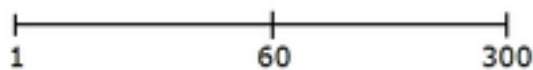
Busquemos los extremos de la función.

Vamos a estudiar el signo de $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{120 - 2x}{5000}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{120 - 2x}{5000} = 0 \rightarrow 120 - 2x = 0 \rightarrow 120 = 2x \rightarrow x = 60$$

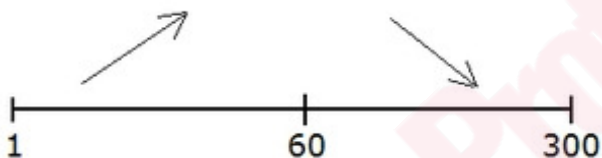
Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos,



$$x = 50 \rightarrow f'(50) = \frac{120 - 2 \cdot 50}{5000} = \frac{20}{5000} = +$$

$$x = 70 \rightarrow f'(70) = \frac{120 - 2 \cdot 70}{5000} = \frac{-20}{5000} = -$$

Luego:



Por lo que en $x = 60$ hay un máximo relativo, y como la función a la izquierda de 60 es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto. $x = 60 \rightarrow f(60) = \frac{120 \cdot 60 - 60^2}{5000} + 40 = \frac{3600}{5000} + 40 = 40'72$

Como $f(x)$ es creciente de 1 a 60 y decreciente de 60 a 300, el mínimo absoluto corresponderá a uno de los extremos del intervalo de definición. Calculemos en que extremo se alcanza el mínimo:

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{120 \cdot 1 - 1^2}{5000} + 40 = \frac{119}{5000} + 40 = 40'0238$$

$$x = 300 \rightarrow f(300) = \frac{120 \cdot 300 - 300^2}{5000} + 40 = \frac{-5400}{5000} + 40 = 29'2$$

Luego el mínimo se alcanza para $x = 300$ (último día)

Por lo tanto: el día de máxima producción es a los 60 días después del parto y produce 40'72 l. de leche y el día de mínima producción es a los 300 días después del parto y produce 29'2 l. de leche.

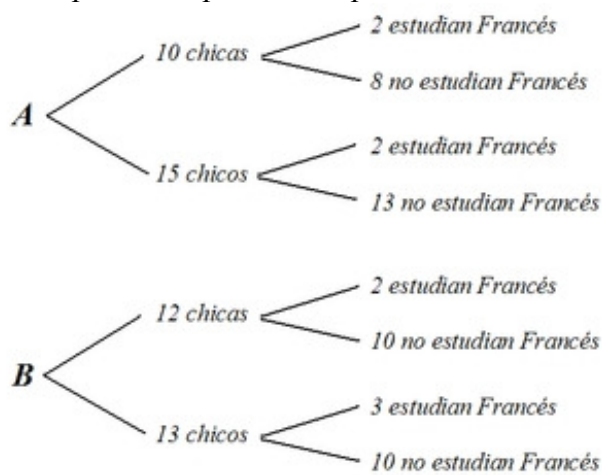
OPCIÓN B

PROBLEMA 3. En un instituto hay dos grupos de segundo de Bachillerato. En el grupo A hay 10 chicas y 15 chicos, de los que 2 chicas y 2 chicos cursan francés. En el grupo B hay 12 chicas y 13 chicos, de los que 2 chicas y 3 chicos cursan francés.

- Se elige una persona de segundo de Bachillerato al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no curse francés?
- Sabemos que una determinada persona matriculada en segundo de Bachillerato cursa francés. ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo B?
- Se elige al azar una persona de segundo de Bachillerato del grupo A. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico y no curse francés?

Solución:

Los datos del problema podemos representarlos mediante el siguiente árbol,



Y en total hay 50 personas de las cuales 9 estudian Francés.

- a) Llamando F = la persona estudia Francés

$$\text{Probabilidad de que no curse francés} = P(\bar{F}) = \frac{41}{50}$$

- b) Llamando B = la persona pertenece al grupo B

$$P\left(\frac{B}{F}\right) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{9}{50}} = \frac{5 \cdot 50}{9 \cdot 50} = \frac{5}{9}$$

- c) La persona elegida es de 2ºA, probabilidad de ser chico y no estudiar Francés = $\frac{13}{25}$

A

10 chicas

2 estudian Francés

8 no estudian Francés

15 chicos

2 estudian Francés

13 no estudian Francés

B

12 chicas

2 estudian Francés

10 no estudian Francés

13 chicos

3 estudian Francés

10 no estudian Francés

Tu Profe al Rescate

Tu Profe al Rescate