

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

- a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (8 puntos)
- b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? (2 puntos)

Solución:

Llamando: $x = n^\circ$ de latas del tipo A $y = n^\circ$ de latas del tipo B

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Lata	hidratos de carbono	proteínas	grasas	euros/lata
A	4	6	1	10
B	2	20	12	16

Las restricciones serán:

El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente

“un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono” $\rightarrow 4x + 2y \geq 8$

“un mínimo de 46 unidades de proteínas” $\rightarrow 6x + 20y \geq 46$

“un mínimo de 12 unidades de grasas” $\rightarrow x + 12y \geq 12$

Como las variables x e y representan latas, deben ser números naturales.

El precio a pagar viene dado por la función: $z = 10x + 16y$

El problema a resolver es:

minimizar $z = 10x + 16y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 4x + 2y \geq 8 \\ 6x + 20y \geq 46 \\ x + 12y \geq 12 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$4x + 2y \geq 8$$

$$4x + 2y = 8$$

x	y
0	4
2	0

¿(0,0) cumple?

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 8 \quad \text{No}$$

$$6x + 20y \geq 46$$

$$6x + 20y = 46$$

	x	y
	0	$\frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2'3$
$\frac{46}{6} = \frac{23}{3} \cong 7'6$		0

¿(0,0) cumple?

$$6 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \geq 46 \quad \text{No}$$

$$x + 12y \geq 12$$

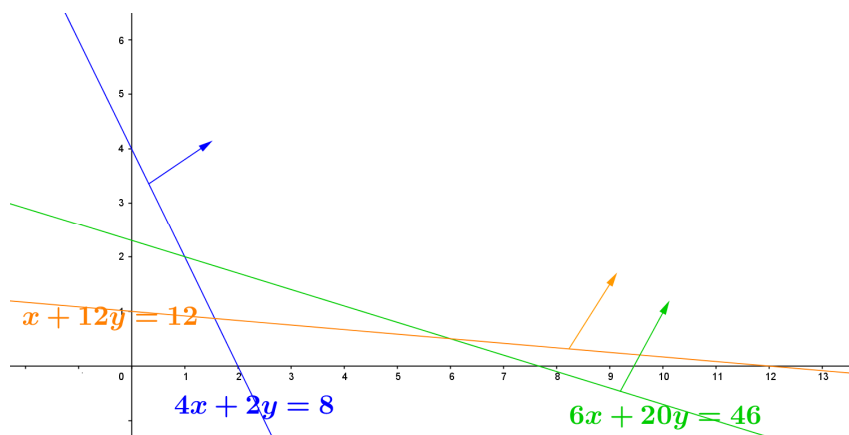
$$x + 12y = 12$$

x	y
0	1
12	0

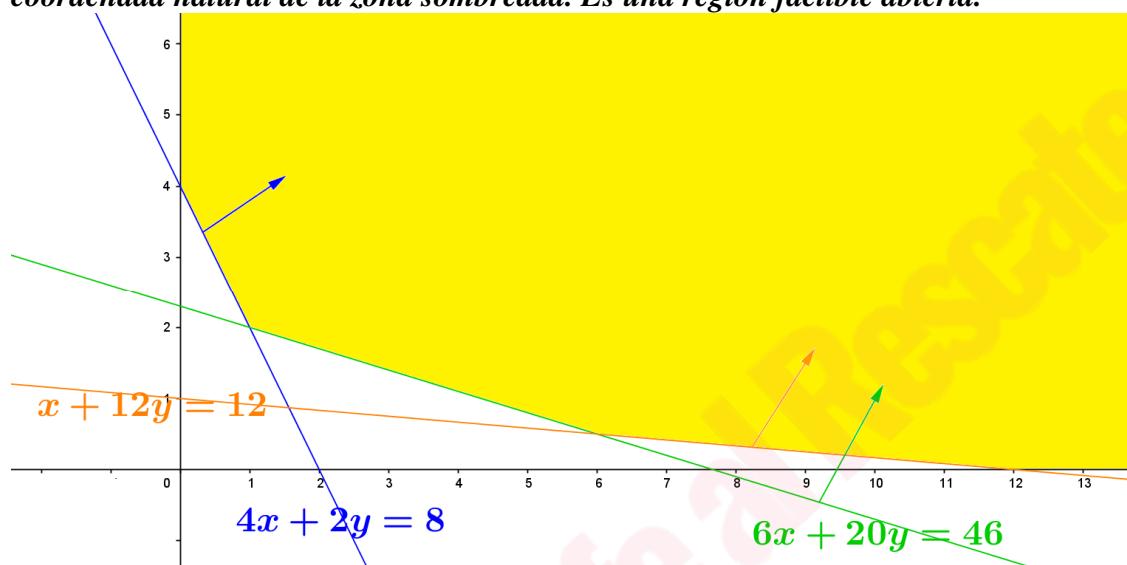
¿(0,0) cumple?

$$0 + 12 \cdot 0 \geq 12 \quad \text{No}$$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada. Es una región factible abierta.



Vértices de la región factible:

El del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: $(12, 0)$ y $(0, 4)$.

Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10xI^a \\ -40x - 20y = -80 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones: } -34x = -34; \quad x = \frac{-34}{-34} = 1$$

Luego punto de corte $(1, 2)$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$$4 \cdot 1 + 2y = 8; \quad 2y = 8 - 4; \quad 2y = 4; \quad y = 2$$

$$\begin{cases} x + 12y = 12 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6xI^a \\ -6x - 72y = -72 \\ 6x + 20y = 46 \end{cases}$$

$$\text{Sumando ambas ecuaciones: } -52y = -26; \quad y = \frac{-26}{-52} = \frac{1}{2}$$

Luego punto de corte $\left(6, \frac{1}{2}\right)$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,

$$x + 12 \cdot \frac{1}{2} = 12; \quad x + 6 = 12; \quad x = 12 - 6 = 6$$

Los vértices de la región factible son: $(0, 4)$, $(1, 2)$, $\left(6, \frac{1}{2}\right)$ y $(12, 0)$.

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 10x + 16y$	
$0, 4$	$10 \cdot 0 + 16 \cdot 4 = 64$	
$1, 2$	$10 \cdot 1 + 16 \cdot 2 = 42$	mínimo
$6, \frac{1}{2}$	$10 \cdot 6 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 68$	
$12, 0$	$10 \cdot 12 + 16 \cdot 0 = 120$	

El mínimo se alcanza en el punto $(1, 2)$

Por tanto,

- a) Para obtener la dieta deseada por el mínimo precio debe combinar 1 lata del tipo A y 2 del tipo B.
- b) El mínimo precio que habrá de pagar será de 42€ al día.

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (4 puntos)

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A X = B^t X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ puntos})$$

Solución:

a) ¿ x ? / $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal.

La matriz debe cumplir $A^t A = A A^t$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al sistema:

$$\begin{cases} 5 = 5 & \text{identidad} \\ 2-x = -2+x \rightarrow 2+2 = x+x \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2 \\ 2-x = -2+x \rightarrow x = 2 \\ 1+x^2 = 1+x^2 & \text{identidad (se cumple para cualquier valor de } x) \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 2$.

Solución: la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ es normal para $x = 2$.

b) $X / A X = B^t X - C$

Despejemos X de la ecuación matricial dada.

$A X - B^t X = -C$; $(A - B^t) X = -C$, si existe $(A - B^t)^{-1} \rightarrow$ multiplicando por $(A - B^t)^{-1}$ por la izquierda: $(A - B^t)^{-1} (A - B^t) X = (A - B^t)^{-1} (-C) \rightarrow X = -(A - B^t)^{-1} C$

Comprobemos que existe $(A - B^t)^{-1}$,

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{como} \quad |A - B^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B^t)^{-1}$$

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (A - B^t)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) & -1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 15}{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2} = \frac{-15}{-2} = \frac{15}{2} \rightarrow \left(0, \frac{15}{2} \right)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = 0; \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3 & (3, 0) \\ x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5 & (-5, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0, \frac{15}{2} \right)$, $(-5, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

la asíntota horizontal es $y = \frac{1}{2}$.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x = \frac{-1}{2}$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 15}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2} = \frac{-63/4}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ es a.v.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 15}{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2} = \frac{-7}{0} = \infty \rightarrow x = 2 \text{ es a.v.}$$

La asíntota horizontal es $y = \frac{1}{2}$ y las asíntotas verticales son $x = \frac{-1}{2}$ y $x = 2$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (2x^2-3x-2) - (x^2+2x-15) \cdot (4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2} = \frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2x^2-3x-2}{2x+2} \quad \frac{x^2+2x-15}{4x-3} \quad \frac{4x^3-2x^2-10x-4}{-4x^3-5x^2+66x-45} \\ \hline 4x^2-6x-4 \quad -3x^2-6x+45 \quad -7x^2+56x-49 \\ \hline 4x^3-6x^2-4x \quad 4x^3+8x^2-60x \quad -7x^2+56x-49 \\ \hline 4x^3-2x^2-10x-4 \quad 4x^3+5x^2-66x+45 \end{array}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-7x^2+56x-49=0 \rightarrow x = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-49)}}{2 \cdot (-7)} = \frac{-56 \pm \sqrt{3136 - 1372}}{-14} = \frac{-56 \pm 42}{-14} =$$

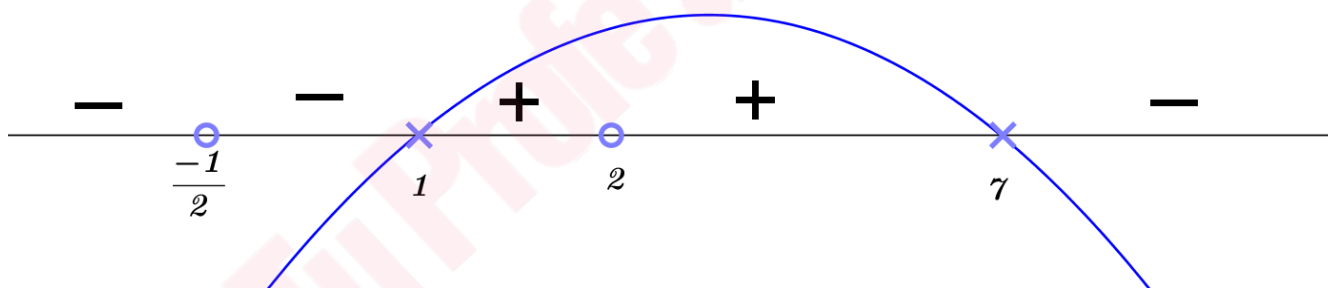
$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-56+42}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1 \\ x_2 = \frac{-56-42}{-14} = \frac{-98}{-14} = 7 \end{cases}$$

$$(2x^2-3x-2)^2=0 \rightarrow 2x^2-3x-2=0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = \frac{-1}{2} \quad \text{y} \quad x = 2$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left(\left\{ \frac{-1}{2}, 2 \right\} \notin \text{Dom } f(x) \right)$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 1 y 7, luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(1, 2) \cup (2, 7)$ y

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 1\right) \cup (7, +\infty)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 1$ hay un mínimo local y en $x = 7$ hay un máximo local.

$$x = 1 \quad f(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 15}{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2} = \frac{-12}{-3} = 4 \rightarrow \text{Mínimo local } (1, 4)$$

$$x = 7 \quad f(7) = \frac{7^2 + 2 \cdot 7 - 15}{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} = 0'64 \rightarrow \text{Máximo local } \left(7, \frac{16}{25}\right)$$

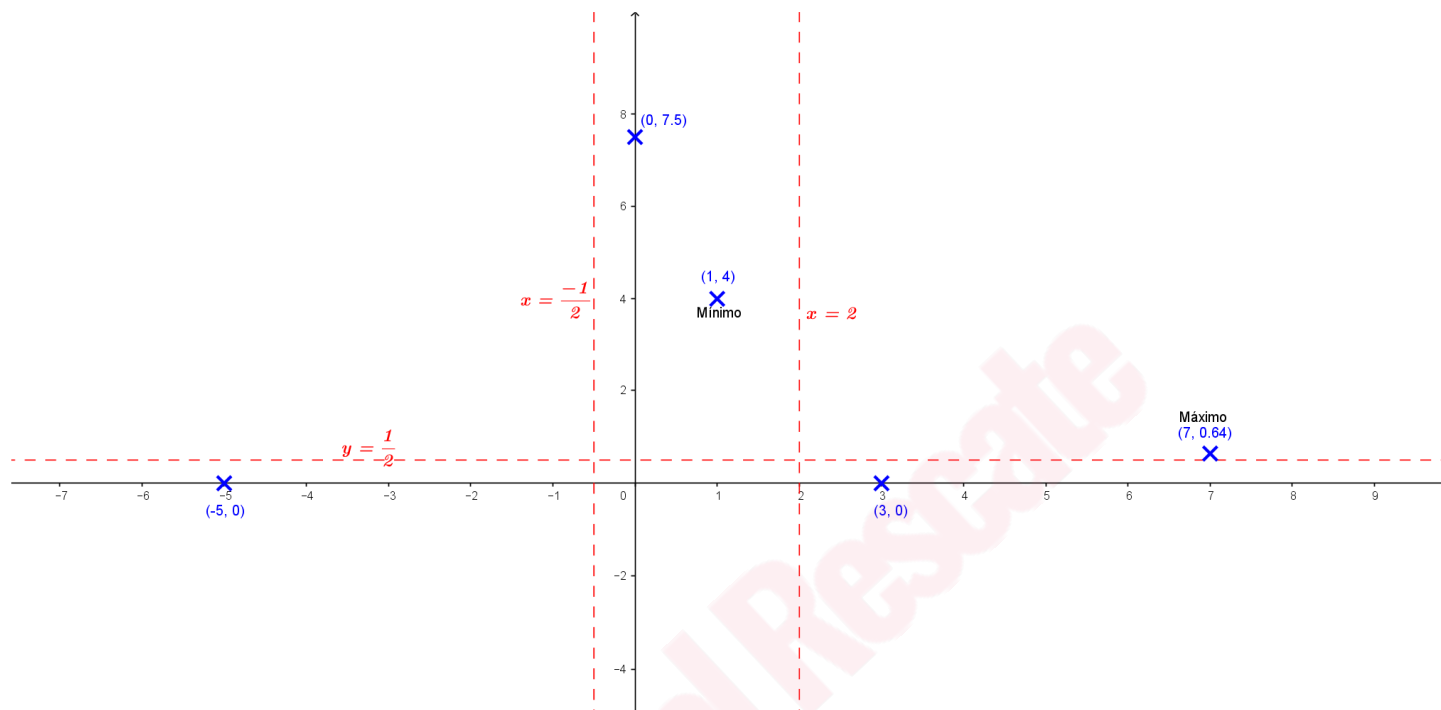
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 4)$, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$, mínimo local en $(0, 4)$, máximo local en

$\left(-2, \frac{16}{5}\right)$; a.h. $y = 3$, a.v. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:

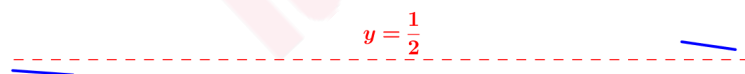


Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

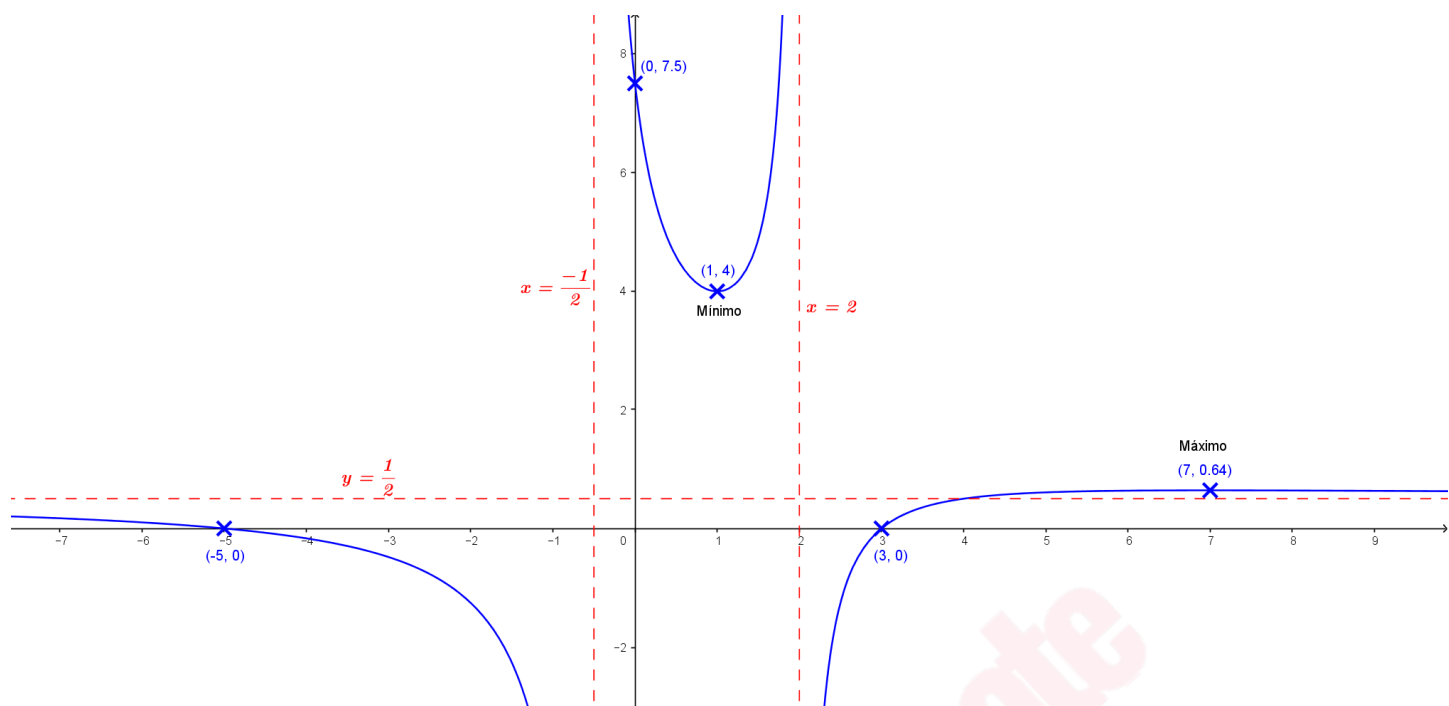
A.H. $y = \frac{1}{2}$

En $-\infty$, $x = -1000 \rightarrow y = \frac{(-1000)^2 + 2 \cdot (-1000) - 15}{2 \cdot (-1000)^2 - 3 \cdot (-1000) - 2} = 0'4982... < \frac{1}{2}$

En $+\infty$, $x = 1000 \rightarrow y = \frac{1000^2 + 2 \cdot 1000 - 15}{2 \cdot 1000^2 - 3 \cdot 1000 - 2} = 0'5017... > \frac{1}{2}$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:



Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

- ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? (2 puntos)
- Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. (5 puntos)
- Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. (3 puntos)

Solución:

a) Consumo de 400 kWh. $400 = 250 + 150$

Por tanto el pago por este consumo será: $P(400) = 1200 + 250 \cdot 5 + 150 \cdot 3 = 2900$

El recibo del mes en que la empresa consume 400 kWh asciende a 2900€.

b) Consumo de x kWh. El consumo de kWh es siempre mayor o igual a 0.

Si $0 \leq x \leq 250 \rightarrow P(x) = 1200 + 5x$

Si $250 < x \leq 900 \rightarrow P(x) = 1200 + 250 \cdot 5 + (x - 250) \cdot 3 = 1200 + 1250 + 3x - 750 = 1700 + 3x$

Si $x > 900 \rightarrow P(x) = 1200 + 250 \cdot 5 + (900 - 250) \cdot 3 + (x - 900) \cdot 2 =$
 $= 1200 + 1250 + 650 \cdot 3 + 2x - 1800 = 2600 + 2x$

La función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh es:

$$P(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & 0 \leq x \leq 250 \\ 1700 + 3x & 250 < x \leq 900 \\ 2600 + 2x & x > 900 \end{cases}$$

Veamos si es continua, los problemas de continuidad están en los cambios de definición.

$$\lim_{x \rightarrow 250} P(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 250^-} (1200 + 5x) = 1200 + 5 \cdot 250 = 2450 \\ \lim_{x \rightarrow 250^+} (1700 + 3x) = 1700 + 3 \cdot 250 = 2450 \end{cases} = 2450$$

Por tanto, la función es continua.

$$\lim_{x \rightarrow 900} P(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 900^-} (1700 + 3x) = 1700 + 3 \cdot 900 = 4400 \\ \lim_{x \rightarrow 900^+} (2600 + 2x) = 2600 + 2 \cdot 900 = 4400 \end{cases} = 4400$$

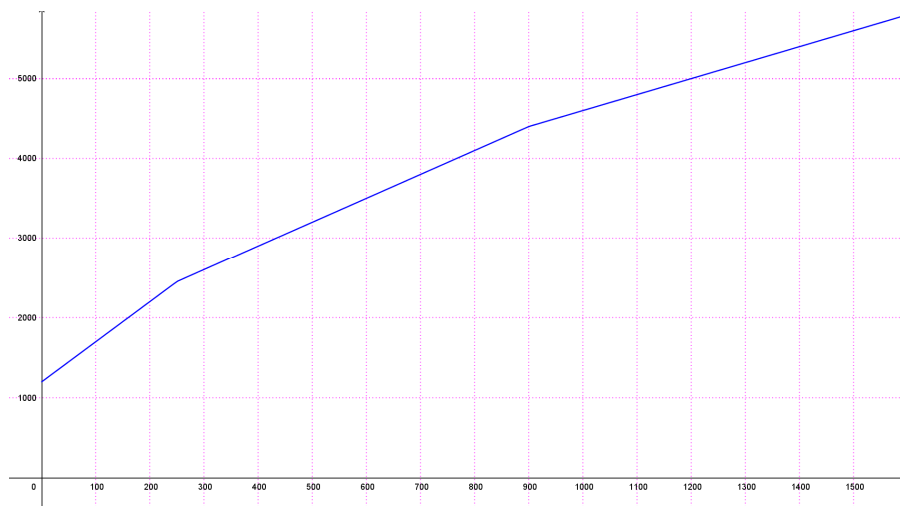
Representación gráfica de $P(x)$. Las tres ramas de la función son polinomios de 1º grado que gráficamente son líneas rectas.

$$x = 0 \rightarrow P(0) = 1200 + 5 \cdot 0 = 1200$$

$$x = 250 \rightarrow P(250) = 1200 + 5 \cdot 250 = 2450$$

$$x = 900 \rightarrow P(900) = 1700 + 3 \cdot 900 = 4400$$

$$x = 1000 \rightarrow P(1000) = 2600 + 2 \cdot 1000 = 4600$$



c)

El recibo de la otra empresa es: $P_2(x) = 1200 + 3x$

¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan?
Debemos comparar $P(x)$ y $P_2(x)$.

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 250 \rightarrow 1200 + 5x = 1200 + 3x; \quad 5x - 3x = 1200 - 1200; \quad 2x = 0; \quad x = 0.$$

$$P(0) = 1200 + 5 \cdot 0 = 1200$$

$$\text{Si } 250 < x \leq 900 \rightarrow 1700 + 3x = 1200 + 3x; \quad 1700 - 1200 = 3x - 3x; \quad 500 = 0 \quad \text{Sin solución}$$

$$\text{Si } x > 900 \rightarrow 2600 + 2x = 1200 + 3x; \quad 2600 - 1200 = 3x - 2x; \quad 1400 = x \quad (1400 > 900) \quad x = 1400$$

$$P(1400) = 2600 + 2 \cdot 1400 = 5400$$

Puede ocurrir con dos consumos:

un consumo de 0 kWh y ambas pagan 1200€ o

un consumo de 1400 kWh y ambas pagan 5400€.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin ataque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin ataque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? (4 puntos)
- Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? (3 puntos)
- Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

R = Arsenio Lupin atraca el Banco de París el 31 de diciembre

$\bar{R}$ = Arsenio Lupin **no** atraca el Banco de París el 31 de diciembre

S = la alarma suena

$\bar{S}$ = la alarma no suena

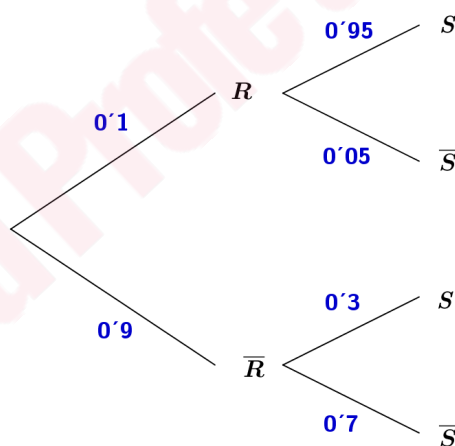
De los datos del enunciado, la probabilidad de que la alarma suene depende de si se está cometiendo atraco o no. Arsenio Lupin es el único atracador al banco el día 31 de diciembre.

“El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin ataque el Banco población” $\rightarrow$

$P(R) = 0'1$ y como se produce atraco $P(S) = 0'95$ y $P(\bar{S}) = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(\bar{R}) = 1 - 0'1 = 0'9$ y como no se produce atraco $P(S) = 0'3$ y $P(\bar{S}) = 1 - 0'3 = 0'7$

El árbol del problema es:



- a) Probabilidad de que Arsenio Lupin ataque el Banco de París ese día y que no suene la alarma test.

La probabilidad pedida es: $P(R \cap \bar{S})$

$$P(R \cap \bar{S}) = 0'1 \cdot 0'05 = 0'005$$

- b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?

La probabilidad pedida es: $P(\bar{R} / S)$

$$P(\bar{R} / S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{0'9 \cdot 0'3}{0'1 \cdot 0'95 + 0'9 \cdot 0'3} = \frac{54}{73} \cong 0'7397$$

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París?

La probabilidad pedida es: $P(R/\bar{S})$

$$P(R/\bar{S}) = \frac{P(R \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0'1 \cdot 0'05}{0'1 \cdot 0'05 + 0'9 \cdot 0'7} = \frac{1}{127} \cong 0'0079$$

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

- Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? (3 puntos)
- Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. (3 puntos)
- Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? (4 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

J = el cliente está casado

G = el cliente no está casado

$1V$ = el cliente realiza un viaje al año

$2V$ = el cliente realiza dos viajes al año

$3V$ = el cliente realiza tres o más viajes al año

Los datos del enunciado podemos resumirlos en la siguiente tabla. Como en el enunciado se indican tantos por ciento, consideramos que hay 100 clientes.

	$1V$ un viaje	$2V$ dos viajes	$3V$ tres o más viajes	
J (casados)	54	14	2	
G (no casados)				
	60	30	10	

Completamos la tabla con las restas y sumas correspondientes

	$1V$ un viaje	$2V$ dos viajes	$3V$ tres o más viajes	
J (casados)	54	14	2	70
G (no casados)	6	16	8	30
	60	30	10	100

- Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado?

La probabilidad pedida es: $P\left(\frac{G}{(2V \cup 3V)}\right)$

$$P\left(\frac{G}{(2V \cup 3V)}\right) = \frac{16 + 8}{30 + 10} = \frac{24}{40} = 0.6$$

- Calcula $P(G \cup H)$

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{30}{100} + \frac{60 + 30}{100} - \frac{6 + 16}{100} = \frac{30 + 90 - 22}{100} = \frac{98}{100} = 0.98$$

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes?

Debemos comprobar si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$

$$\left. \begin{array}{l} P(J \cap K) = \frac{54 + 2}{100} = \frac{56}{100} \\ P(J) = \frac{70}{100} \\ P(K) = \frac{60 + 10}{100} = \frac{70}{100} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{¿} \frac{56}{100} = \frac{70}{100} \cdot \frac{70}{100} \text{?}; \text{ ¿} \frac{56}{100} = \frac{49}{100} \text{?} \end{array} \quad \text{No}$$

Por tanto, los sucesos J y K no son independientes.

Tu Profe al Rescate