

# PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo orientativo 2020-2021

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

## A.1. Inversa y potencias de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Valores de  $x$  para los que existe  $A^{-1}$

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es no nulo. Desarrollamos por la segunda columna, que contiene dos ceros:

$$\det A = - \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - (x-1)(x+1)) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Por tanto, el determinante se anula para  $x = \pm 2$ . **Conclusión.**  $A$  tiene inversa para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .

b) Inversa para  $x = -1$

Sustituyendo  $x = -1$ :

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos Gauss-Jordan a la matriz ampliada  $[A_{-1} \mid I]$ . Primero dividimos la tercera fila entre 3; después sumamos la tercera fila a la primera y dos veces la tercera a la segunda; por último intercambiamos las dos primeras filas:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

La parte derecha de la matriz reducida es la inversa:

$$A_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Conclusión.** Para  $x = -1$ , la inversa de  $A$  es la matriz indicada.

**c) Cálculo de  $(AB^T)^{2020}$  para  $x = 1$**

Para no calcular una potencia enorme directamente, primero hallamos el producto  $AB^T$  con  $x = 1$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$M = A_1 B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos potencias sucesivas para detectar si se repiten:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

De aquí,  $M^6 = (M^3)^2 = I$ , así que las potencias se repiten cada 6. Dividimos el exponente entre 6:

$$2020 = 6 \cdot 336 + 4.$$

Por tanto,  $M^{2020} = M^4 = M^3 M = -M$ :

$$(AB^T)^{2020} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Conclusión.** La potencia pedida es la matriz anterior.

## A.2. Continuidad, asíntotas y recta tangente

La función es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1}, & x \leq 1, \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

En el primer tramo debemos excluir  $x = -1$ ; el segundo solo se usa para  $x > 1$ , donde el logaritmo está definido. Por ello, el dominio es  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

### a) Continuidad

En cada tramo la función es continua en su dominio. Los únicos puntos que requieren comprobación son  $x = 1$ , donde cambia la expresión, y  $x = -1$ , que está excluido.

En  $x = 1$ :

$$f(1) = \frac{2}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/x}{1} = 1,$$

donde en el límite derecho hemos aplicado L'Hôpital a la indeterminación  $0/0$ . Los límites laterales coinciden con  $f(1)$ , así que la función es continua en 1.

En  $x = -1$ , la función no está definida. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty,$$

por lo que hay una discontinuidad infinita en ese punto. **Conclusión.**  $f$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  y presenta una discontinuidad infinita en  $x = -1$ .

### b) Asíntotas

La discontinuidad infinita da una asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \implies x = -1.$$

Para las asíntotas horizontales estudiamos los límites en ambos extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Así,  $y = 0$  es asíntota horizontal tanto cuando  $x \rightarrow -\infty$  como cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Al existir asíntota horizontal en los dos extremos, no hay que buscar asíntotas oblicuas. **Conclusión.** La única asíntota vertical es  $x = -1$  y la horizontal es  $y = 0$  en ambos extremos.

### c) Tangente con pendiente $-\frac{1}{2}$ y $x_0 < 1$

Como  $x_0 < 1$ , usamos la expresión  $f(x) = 2/(x+1)$ . Su derivada es

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}.$$

Igualemos a la pendiente pedida:

$$-\frac{2}{(x_0+1)^2} = -\frac{1}{2} \implies (x_0+1)^2 = 4 \implies x_0 = 1 \text{ o } x_0 = -3.$$

La condición  $x_0 < 1$  descarta  $x_0 = 1$ , de modo que  $x_0 = -3$ . El punto de tangencia es

$$f(-3) = \frac{2}{-2} = -1, \quad (-3, -1).$$

Con la fórmula punto-pendiente, la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 3).$$

**Conclusión.**  $x_0 = -3$  y la recta tangente es  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ .

## A.3. Vectores y rectas

### a) Punto $Q$ a partir de dos vectores

Calculamos el vector entre  $A$  y  $B$  restando sus coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 3, 3 - 1, 4 - 2) = (-3, 2, 2).$$

Los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{PQ}$  tienen el mismo módulo y sentidos opuestos, así que  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$ . Como  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ , sumamos este vector a  $P$ :

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0) + (3, -2, -2) = (2, -1, -2).$$

**Conclusión.** El punto buscado es  $Q = (2, -1, -2)$ .

### b) Intersección de las rectas $AP$ y $BC$

Para la recta que pasa por  $A$  y  $P$ , un vector director es

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-1 - 3, 1 - 1, 0 - 2) = (-4, 0, -2).$$

Para la recta por  $B$  y  $C$ :

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2 - 0, -1 - 3, -2 - 4) = (2, -4, -6).$$

Sus formas paramétricas son

$$r : \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 2u \\ y = 3 - 4u \\ z = 4 - 6u \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

Igualamos las coordenadas para encontrar un punto común. De la segunda coordenada,  $1 = 3 - 4u$ , luego  $u = \frac{1}{2}$ ; la tercera da  $2 - 2t = 4 - 6(\frac{1}{2}) = 1$ , por lo que  $t = \frac{1}{2}$ . Las primeras coordenadas también coinciden:  $3 - 4(\frac{1}{2}) = 1 = 2(\frac{1}{2})$ . **Conclusión.** Las rectas se cortan en el punto  $(1, 1, 1)$ .

### c) Coseno del ángulo entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$

Restamos las coordenadas del punto inicial  $P$ :

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (3 - (-1), 1 - 1, 2 - 0) = (4, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (0 - (-1), 3 - 1, 4 - 0) = (1, 2, 4).$$

El producto escalar satisface  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ , por lo que

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PA}\| \|\overrightarrow{PB}\|} = \frac{4 + 0 + 8}{\sqrt{20}\sqrt{21}} = \frac{12}{2\sqrt{105}} = \frac{6}{\sqrt{105}}.$$

**Conclusión.** El coseno del ángulo pedido es  $\frac{6}{\sqrt{105}}$ .

## A.4. Distribución binomial

Cada alumno practica baloncesto con probabilidad  $p = 1/4$ , y no lo practica con probabilidad  $q = 3/4$ . Al elegir seis alumnos, consideramos ensayos independientes con la misma probabilidad de éxito; por tanto,

$$X \sim \text{Binomial} \left( 6, \frac{1}{4} \right).$$

La probabilidad de obtener exactamente  $k$  alumnos que practican baloncesto se calcula mediante

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left( \frac{1}{4} \right)^k \left( \frac{3}{4} \right)^{6-k}.$$

### a) Ninguno practica baloncesto

Para  $X = 0$ :

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left( \frac{1}{4} \right)^0 \left( \frac{3}{4} \right)^6 = \frac{729}{4096} \approx 0,17798.$$

**Conclusión.** La probabilidad de que ninguno practique baloncesto es  $\frac{729}{4096}$ .

### b) Al menos cinco practican baloncesto

«Al menos cinco» significa  $X = 5$  o  $X = 6$ . Sumamos las dos probabilidades binomiales:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= \binom{6}{5} \left( \frac{1}{4} \right)^5 \left( \frac{3}{4} \right) + \binom{6}{6} \left( \frac{1}{4} \right)^6 \\ &= \frac{18}{4096} + \frac{1}{4096} = \frac{19}{4096} \approx 0,00464. \end{aligned}$$

**Conclusión.** La probabilidad pedida es  $\frac{19}{4096} \approx 0,00464$ .

### c) Al menos uno practica baloncesto

Usamos el suceso complementario porque es más sencillo calcular que ninguno practique. El suceso complementario a  $X \geq 1$  es  $X = 0$ :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{729}{4096} = \frac{3367}{4096} \approx 0,82202.$$

**Conclusión.** La probabilidad de que al menos uno practique baloncesto es  $\frac{3367}{4096} \approx 0,82202$ .

## B.1. Operaciones y discusión de matrices

La matriz y el vector del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de  $a$  que cumplen  $B^T(A + A^T)B = 6$

Primero sumamos la matriz con su traspuesta:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & a-2 \\ a+1 & -6 & a-3 \\ a-2 & a-3 & 2a \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos esta matriz por  $B$ :

$$(A + A^T)B = \begin{pmatrix} 3a-3 \\ 2a-12 \\ 5a-3 \end{pmatrix}.$$

Ahora multiplicamos por  $B^T = (0, 1, 2)$ :

$$B^T(A + A^T)B = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} 3a-3 \\ 2a-12 \\ 5a-3 \end{pmatrix} = 12a - 18.$$

Imponemos que el resultado sea 6:

$$12a - 18 = 6 \implies a = 2.$$

**Conclusión.** La igualdad se cumple para  $a = 2$ .

b) Valor de  $a$  para el que  $AX = B$  no tiene solución

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{array} \right).$$

El determinante de  $A$  es

$$\det A = 3 - a.$$

Si  $a \neq 3$ , el determinante no es cero, por lo que el sistema tiene solución única. El único valor que puede producir incompatibilidad es  $a = 3$ . En ese caso,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

El determinante de  $A_3$  es cero, y el menor formado por las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

por tanto,  $\text{rg}(A_3) = 2$ . En la matriz ampliada, el menor de las tres filas y las columnas primera, segunda y de términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

así que  $\text{rg}(A_3^*) = 3$ . Al ser distintos los rangos, Rouché-Frobenius concluye que el sistema es incompatible.

**Conclusión.** El sistema  $AX = B$  no tiene solución únicamente para  $a = 3$ .

c) Valores de  $a$  para los que  $A = A^{-1}$

Si  $A = A^{-1}$ , al multiplicar por  $A$  se obtiene  $A^2 = I$ . Recíprocamente, si  $A^2 = I$ , entonces  $A$  es su propia inversa. Calculamos la potencia:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a(a-4) & 9-2a & a(a-4) \\ a(a-4) & 8-2a & a(a-4)+1 \end{pmatrix}.$$

Para que sea la identidad, la entrada de la segunda fila y segunda columna debe valer 1:

$$9 - 2a = 1 \implies a = 4.$$

Al sustituir  $a = 4$ , las demás entradas diagonales valen 1 y las no diagonales valen 0, así que efectivamente  $A^2 = I$ . **Conclusión.**  $A = A^{-1}$  únicamente para  $a = 4$ .

## B.2. Crecimiento, extremos y área

La función es polinómica, por lo que su dominio es  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = x^6 - 4x^4.$$

### a) Crecimiento y decrecimiento

El signo de la derivada indica dónde crece o decrece la función. Derivamos y factorizamos:

$$f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8).$$

Los puntos críticos se obtienen resolviendo  $f'(x) = 0$ :

$$2x^3(3x^2 - 8) = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Denotamos  $c = \sqrt{\frac{8}{3}}$ . Los puntos  $-c, 0, c$  dividen la recta real en cuatro intervalos. El signo de cada factor da:

| $x$        | $(-\infty, -c)$ | $(-c, 0)$ | $(0, c)$ | $(c, +\infty)$ |
|------------|-----------------|-----------|----------|----------------|
| $x^3$      | -               | -         | +        | +              |
| $3x^2 - 8$ | +               | -         | -        | +              |
| $f'(x)$    | -               | +         | -        | +              |

Por tanto,  $f$  decrece en  $(-\infty, -c)$  y  $(0, c)$ , y crece en  $(-c, 0)$  y  $(c, +\infty)$ . **Conclusión.**  $f$  decrece en  $(-\infty, -\sqrt{8/3})$  y  $(0, \sqrt{8/3})$ , y crece en  $(-\sqrt{8/3}, 0)$  y  $(\sqrt{8/3}, +\infty)$ .

### b) Extremos locales y globales

El cambio de signo de  $f'$  muestra que hay mínimos locales en  $x = -c$  y  $x = c$ , y un máximo local en  $x = 0$ . Sus valores son

$$f(0) = 0, \quad f(\pm c) = c^6 - 4c^4.$$

Como  $c^2 = 8/3$ , se tiene  $c^4 = 64/9$  y  $c^6 = 512/27$ ; luego

$$f(\pm c) = \frac{512}{27} - 4 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27}.$$

Además,  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , al dominar el término  $x^6$ . Por ello, los mínimos locales son absolutos y no existe máximo absoluto. El máximo local en  $0$  no es global. **Conclusión.** Hay un máximo local  $(0, 0)$ , que no es absoluto, y dos mínimos absolutos en  $(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}, -\frac{256}{27})$ .

### c) Área limitada por la gráfica y el eje de abscisas

Factorizamos la función para localizar sus ceros:

$$f(x) = x^4(x^2 - 4) = x^4(x - 2)(x + 2).$$

Entre  $-2$  y  $2$ ,  $f(x) \leq 0$  y solo se anula en  $-2, 0, 2$ . La región acotada consta de dos partes simétricas, por lo que el área total es

$$\mathcal{A} = -\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx.$$

El signo menos convierte la integral negativa en área positiva. Integramos y evaluamos:

$$\mathcal{A} = 2 \left[ \frac{4x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^2 = 2 \left( \frac{128}{5} - \frac{128}{7} \right) = \frac{512}{35}.$$

**Conclusión.** El área total es  $\frac{512}{35}$  unidades cuadradas.

### B.3. Distancia, posición relativa y perpendicular común

La recta  $r$  es la intersección de los planos  $x + 2z = 1$  e  $y + z = 2$ . Tomando  $z = t$  obtenemos la forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La otra recta ya está en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Usaremos  $R = (1, 2, 0)$  y  $\vec{u} = (-2, -1, 1)$  para  $r$ , y  $S = (-3, 2, 1)$  y  $\vec{v} = (2, -1, 1)$  para  $s$ .

#### a) Distancia del origen a $s$

La distancia de un punto  $O$  a una recta que pasa por  $S$  con vector director  $\vec{v}$  puede calcularse mediante

$$d(O, s) = \frac{\|\vec{SO} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Aquí  $\vec{SO} = O - S = (3, -2, -1)$ . Entonces

$$\vec{SO} \times \vec{v} = (3, -2, -1) \times (2, -1, 1) = (-3, -5, 1),$$

cuyo módulo es  $\sqrt{35}$ , mientras que  $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$ . Por tanto,

$$d(O, s) = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{35}{6}}.$$

**Conclusión.** La distancia del origen a  $s$  es  $\sqrt{\frac{35}{6}}$ .

#### b) Posición relativa de $r$ y $s$

Los vectores directores no son proporcionales. Para decidir si las rectas se cortan o son cruzadas, calculamos el producto mixto:

$$\vec{RS} = S - R = (-3 - 1, 2 - 2, 1 - 0) = (-4, 0, 1),$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2, -1, 1) \times (2, -1, 1) = (0, 4, 4).$$

Entonces

$$\vec{RS} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-4, 0, 1) \cdot (0, 4, 4) = 4 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo demuestra que las rectas no son coplanarias; junto con la no proporcionalidad de sus directores, concluimos que son cruzadas. **Conclusión.**  $r$  y  $s$  son rectas cruzadas.

### c) Recta perpendicular común

La dirección de la perpendicular común debe ser perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ . Su producto vectorial es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 4),$$

así que podemos usar  $(0, 1, 1)$  como vector director. Para hallar un punto de la perpendicular común, buscamos los puntos más próximos de las dos rectas:

$$R_t = R + t\vec{u}, \quad S_\lambda = S + \lambda\vec{v}.$$

El vector que los une debe ser perpendicular a ambos directores:

$$S_\lambda - R_t = (2t + 2\lambda - 4, t - \lambda, -t + \lambda + 1).$$

Imponiendo los productos escalares nulos:

$$(S_\lambda - R_t) \cdot \vec{u} = 0 \implies -6t - 2\lambda + 9 = 0,$$

$$(S_\lambda - R_t) \cdot \vec{v} = 0 \implies 2t + 6\lambda - 7 = 0.$$

La solución es  $t = \frac{5}{4}$ ,  $\lambda = \frac{3}{4}$ . El punto correspondiente de  $r$  es

$$R_{5/4} = (1, 2, 0) + \frac{5}{4}(-2, -1, 1) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

La recta buscada pasa por ese punto y tiene dirección  $(0, 1, 1)$ :

$$\ell : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{4} + \mu, \\ z = \frac{5}{4} + \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

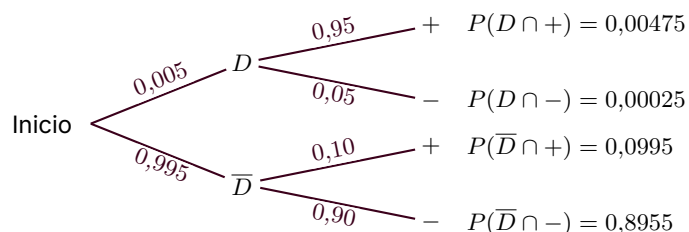
**Conclusión.** Una perpendicular común a  $r$  y  $s$  es la recta paramétrica  $\ell$ .

## B.4. Probabilidad total y teorema de Bayes

Definimos  $D$  como el suceso «la persona padece la dolencia» y  $+$  como «el diagnóstico indica que está enferma». Los datos son

$$P(D) = \frac{50}{10000} = 0,005, \quad P(+ | D) = 0,95, \quad P(+ | \bar{D}) = 0,10.$$

El último dato es la tasa de falsos positivos entre las personas sanas; por tanto,  $P(- | \bar{D}) = 0,90$ . En el árbol, la probabilidad conjunta de cada camino se obtiene multiplicando las probabilidades de sus ramas:



### a) Probabilidad de que el diagnóstico indique enfermedad

Sumamos los dos casos incompatibles que producen un diagnóstico positivo:

$$P(+) = P(D)P(+ | D) + P(\bar{D})P(+ | \bar{D}) = 0,00475 + 0,0995 = 0,10425.$$

**Conclusión.** La probabilidad de que sea diagnosticada como enferma es 0,10425.

### b) Probabilidad de que esté enferma dado el diagnóstico positivo

Aplicamos Bayes porque conocemos la probabilidad del resultado del diagnóstico condicionada a padecer o no la enfermedad, y queremos invertir esa condición:

$$P(D | +) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0,00475}{0,10425} = \frac{19}{417} \approx 0,04556.$$

**Conclusión.** Si el diagnóstico es positivo, la probabilidad de que realmente esté enferma es  $\frac{19}{417} \approx 0,04556$ .

### c) Probabilidad de que esté sana dado un diagnóstico negativo

Usamos de nuevo Bayes. La probabilidad de un diagnóstico negativo es

$$P(-) = P(D)P(- | D) + P(\bar{D})P(- | \bar{D}) = 0,00025 + 0,8955 = 0,89575.$$

El caso «sana y diagnosticada sana» tiene probabilidad 0,8955, así que

$$P(\bar{D} | -) = \frac{P(\bar{D} \cap -)}{P(-)} = \frac{0,8955}{0,89575} = \frac{3582}{3583} \approx 0,99972.$$

**Conclusión.** Si el diagnóstico es negativo, la probabilidad de que esté sana es  $\frac{3582}{3583} \approx 0,99972$ .

### d) Probabilidad de que el diagnóstico sea erróneo

Hay dos maneras incompatibles de equivocarse: falso negativo y falso positivo. Sumamos las probabilidades de esos caminos:

$$P(\text{error}) = P(D)P(- | D) + P(\bar{D})P(+ | \bar{D}) = 0,00025 + 0,0995 = 0,09975.$$

**Conclusión.** La probabilidad de un diagnóstico erróneo es 0,09975.