

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2004 · Convocatoria ordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Ecuación matricial

De $AXB = 2C$, aislamos X multiplicando por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha. Como ambos determinantes son no nulos, estas inversas existen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = A^{-1}(2C)B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Al sustituir esta matriz en AXB , se obtiene $2C$, así que satisface la ecuación.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Inversión de préstamos

Sean x e y los millones de euros destinados a préstamos de riesgo alto y medio. Se invierten como máximo 18 millones, al menos 4 en riesgo medio y la razón alto/medio no supera $4/5$:

$$x + y \leq 18, \quad y \geq 4, \quad \frac{x}{y} \leq \frac{4}{5} \iff 5x \leq 4y, \quad x \geq 0.$$

El beneficio, en millones de euros, es $B(x, y) = 0,14x + 0,07y$. Al ser una función lineal, sus extremos se alcanzan en los vértices de la región factible: $(0, 4)$, $(0, 18)$ y la intersección de $x + y = 18$ con $5x = 4y$. Esta última cumple $y = \frac{5}{4}x$, de donde $x = 8$ e $y = 10$.

(x, y)	$(0, 4)$	$(0, 18)$	$(\frac{16}{5}, 4)$	$(8, 10)$
B (millones de €)	0,28	1,26	0,728	1,82

El mayor valor se obtiene en $(8, 10)$.

Invertir 8 millones en riesgo alto y 10 millones en riesgo medio; beneficio máximo: 1,82 millones de €.

Problema 3 · Beneficio máximo

El beneficio es la diferencia entre ingresos y gastos. Por tanto,

$$B(x) = I(x) - G(x) = (28x^2 + 36000x) - (44x^2 + 12000x + 700000) = -16x^2 + 24000x - 700000.$$

La cantidad vendida cumple $x \geq 0$. Para localizar el máximo derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$B'(x) = -32x + 24000 = 0 \implies x = 750.$$

Como $B''(x) = -32 < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y ese punto crítico es un máximo. El beneficio correspondiente es

$$B(750) = -16(750)^2 + 24000(750) - 700000 = 8\,300\,000 \text{ €}.$$

Hay que vender 750 unidades; el beneficio máximo anual es 8 300 000 €.

Problema 4 · Visitantes de un museo

Sean E el suceso «ser español» y M el suceso «tener menos de 20 años». Para sumar los dos grupos posibles usamos la probabilidad total:

$$P(M) = P(E)P(M | E) + P(\overline{E})P(M | \overline{E}) = 0,60 \cdot 0,40 + 0,40 \cdot 0,30 = 0,36.$$

Para el apartado b), «no español y 20 años o más» es una intersección. En el grupo no español, el complemento de ser menor de 20 tiene probabilidad $1 - 0,30 = 0,70$:

$$P(\overline{E} \cap \overline{M}) = P(\overline{E})P(\overline{M} | \overline{E}) = 0,40 \cdot 0,70 = 0,28.$$

$P(\text{menos de 20 años}) = 0,36,$ $P(\text{no español y al menos 20 años}) = 0,28.$

Ejercicio B

Problema 1 · Reparto de una inversión

Sean a, b, c los euros invertidos en las empresas A, B y C. La inversión total y las revalorizaciones fijan el sistema

$$a + b + c = 12000, \quad a = 2(b + c), \quad 0,04a + 0,05b - 0,02c = 432,50.$$

De las dos primeras ecuaciones resulta $a = 8000$ y $b + c = 4000$. Al sustituir en la ecuación del beneficio:

$$320 + 0,05b - 0,02c = 432,50, \quad b = 4000 - c,$$

$$320 + 0,05(4000 - c) - 0,02c = 432,50 \implies 520 - 0,07c = 432,50 \implies c = 1250, \quad b = 2750.$$

A: 8000 €,	B: 2750 €,	C: 1250 €.
------------	------------	------------

Problema 2 · Reparto de vagones

Sean x los vagones destinados a coches y y los destinados a motocicletas. Las restricciones son

$$x + y \leq 27, \quad x \geq 12, \quad y \geq \frac{x}{2}.$$

El ingreso que se quiere maximizar es $I(x, y) = 540x + 360y$. La región factible tiene como vértices $(12, 6)$, $(12, 15)$ y $(18, 9)$; el último se obtiene al intersectar $x + y = 27$ e $y = x/2$. Evaluamos en ellos:

(x, y)	$(12, 6)$	$(12, 15)$	$(18, 9)$
$I \text{ (€)}$	8640	11880	12960

Así se alcanza el máximo en el vértice $(18, 9)$.

18 vagones para coches y 9 para motocicletas; ingreso máximo: 12960 €.
--

Problema 3 · Área de la pared

La superficie es el área bajo $f(x) = -0,5x^2 + x + 1$ entre los extremos de la pared, $x = 0$ y $x = 2$. La parábola es cóncava hacia abajo y en los extremos toma el valor 1, por lo que queda por encima del eje X en todo el intervalo. Planteamos la integral definida:

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = -\frac{8}{6} + 2 + 2 = \frac{8}{3} \text{ m}^2.$$

$$A = \frac{8}{3} \text{ m}^2.$$

Problema 4 · Piezas defectuosas

En una hora, A fabrica 50 piezas y B fabrica 250; por ello $P(A) = \frac{1}{6}$ y $P(B) = \frac{5}{6}$. Sean D el suceso «pieza defectuosa» y N «pieza no defectuosa». La probabilidad conjunta de que proceda de B y no sea defectuosa es

$$P(B \cap N) = P(B)P(N | B) = \frac{5}{6} \cdot 0,90 = \frac{3}{4}.$$

Para hallar $P(A | D)$ aplicamos Bayes. Primero calculamos la probabilidad total de defecto:

$$P(D) = \frac{1}{6} \cdot 0,01 + \frac{5}{6} \cdot 0,10 = \frac{17}{200}.$$

Entonces

$$P(A | D) = \frac{P(A)P(D | A)}{P(D)} = \frac{(1/6) \cdot 0,01}{17/200} = \frac{1}{51}.$$

$$P(B \cap N) = \frac{3}{4}, \quad P(A | D) = \frac{1}{51}.$$