

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 **(0.5 puntos)** Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.
- 1.2 **(1 punto)** Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?
- 1.3 **(1 punto)** Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

C = obtener cara

X = obtener cruz

G = el alumno gana la ronda

$\overline{G}$ = el alumno no gana la ronda

De los datos del enunciado: al lanzar una moneda: $P(C) = \frac{1}{2}$ y $P(X) = \frac{1}{2}$

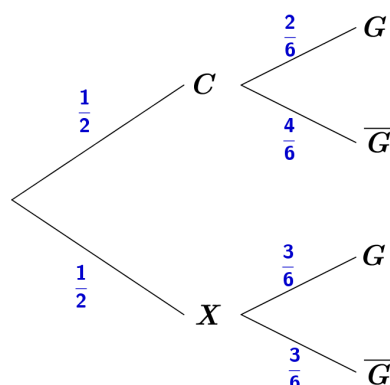
Si la moneda sale cara, “el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5”

$$P(G) = P(\text{número del dado} \geq 5) = \frac{2}{6} \quad \text{y} \quad P(\overline{G}) = P(\text{número del dado} \leq 4) = \frac{4}{6}$$

Si la moneda sale cruz, “el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par”

$$P(G) = P(\text{número par}) = \frac{3}{6} \quad \text{y} \quad P(\overline{G}) = P(\text{número impar}) = \frac{3}{6}$$

El árbol del problema es:



1.1 Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.

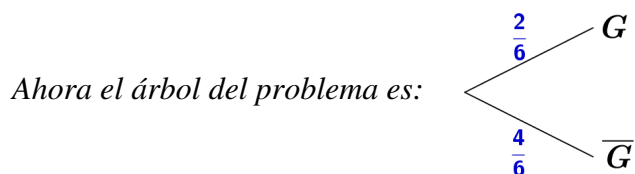
$$P(\text{el alumno gane en una ronda cualquiera}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{12}$$

1.2 Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

1.3 Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

Como la moneda está trucada $P(C) = 1$



Se realizan 7 rondas del juego, es decir, repetimos el mismo experimento 7 veces, considerando $X =$ número de veces que gana $\rightarrow X = B\left(7, \frac{2}{6}\right)$

$$\text{Probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces} = P(X = 5) = \binom{7}{5} \left(\frac{2}{6}\right)^5 \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{28}{729} \cong 0'0384.$$

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

2.1.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 - 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha - 2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0;$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ \hline \end{array} \quad \text{dos soluciones} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

Si $\alpha \neq -1$ y 2

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $\alpha = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A , como $F_2 = -F_1$ y $F_3 = F_1 \rightarrow \text{ran}(A) = 1$.

En A' , el menor de orden 2 correspondiente a F_1 F_2 y C_1 C_4 :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Luego, $\text{ran}(A) = 1 \neq 2 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible

Si $\alpha = 2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, luego $\text{ran}(A) \leq 2$.

En A , el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 - 2 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Solución, si $\alpha \neq -1$ y 2 , el sistema es compatible determinado;

si $\alpha = -1$ o 2 , el sistema es incompatible.

2.1.2 El sistema es compatible (determinado) para $\alpha \neq -1$ y 2 .

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

$|A| = \alpha^3 - 3\alpha - 2$, $\{\alpha \neq -1 \text{ y } 2 \rightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 2 \neq 0\}$. Considerando las raíces obtenidas de este polinomio $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)$.

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{-1 + 2 + 2\alpha - \alpha}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2 - 1 - 2\alpha}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \left\{ \begin{array}{c|cc} -1 & 1 & -2 & -3 \\ & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \right\} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{(\alpha - 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - 1 - \alpha - 2}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \left\{ \begin{array}{c|cc} 2 & -1 & -3 \\ & -2 & 3 \\ \hline 2 & -3 & 0 \end{array} \right\} = \frac{(\alpha + 1)(2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{(2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

Si $\alpha \neq -1$ y 2 , la solución es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \\ y = \frac{\alpha-3}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \\ z = \frac{2\alpha-3}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \end{cases}$$

Tu Profe al Rescate

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Determinar para qué valores de } a \text{ se optimiza el riesgo.}$$

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

Solución:

2.2.1 ¿ a ? / $A^2 - I = 2A$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+(1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 + 1 & 2 \\ 2 & 1 + a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 - 2a + 2 \end{pmatrix} \\ A^2 - I &= \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 - 2a + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} \\ A^2 - I = 2A &\rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a \\ a^2 - 2a + 1 = 2 + 2a \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases} &\rightarrow a^2 = 1; \quad a = \pm 1 \end{aligned}$$

Solución: se optimiza el riesgo cuando $a = -1$ o $a = 1$.

2.2.2 ¿ a ? / existe A^{-1} .

A es invertible si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2; \quad a^2 = 0; \quad a = 0$$

Si $a \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

Cálculo:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$Y \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}$$

Solución: la matriz de simulación admite inversa para $a \neq 0$ y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}$.

Tu Profe al Rescate

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

Solución:

3.1.1 Posición relativa de r y s en función de a .

Estudiemos el sistema formado por las dos rectas:

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \\ 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{la matriz ampliada de este sistema es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad A \text{ es } 4 \times 3 \text{ su máximo}$$

rango será 3 y A' es 4×4 su máximo rango será 4.

Calculemos el $\text{ran}(A)$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 \rightarrow \text{las rectas se cruzan o se cortaran en un punto.}$$

Para que el sistema tenga solución, las dos rectas se corten en un punto, $|A'| = 0$

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{desarrollando} \\ \text{por la 4ª fila} \end{array} \right) = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(5 + 4a + a - 2a) + (2 + 4 + 1) = \\ &= -5 + 3a + 7 = 3a - 2 \end{aligned}$$

$$3a - 2 = 0; \quad 3a = 2; \quad a = \frac{2}{3}$$

Solución: las rectas r y s se cortan en un punto cuando $a = \frac{2}{3}$ y se cruzan cuando $a \neq \frac{2}{3}$.

Otra forma de resolver este apartado es:

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas. Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} y = a - 2x \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = a - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} P_r(0, a, 1) \\ \vec{v}_r(-1, 2, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases} \quad \text{como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ despejamos } x \text{ e } y \text{ en función de } z.$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 - 2z \\ x = a - z \end{cases} \quad \text{sustituyendo el valor de } x \text{ en la 1ª ecuación: } -(a - z) + 2y = 5 - 2z;$$

$$-a + z + 2y = 5 - 2z; \quad 2y = 5 + a - 2z - z; \quad 2y = 5 + a - 3z; \quad y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}z \rightarrow$$

$$s: \begin{cases} x = a - \mu \\ y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}\mu \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} P_s \left(a, \frac{5+a}{2}, 0 \right) \\ \vec{v}_s \left(-1, -\frac{3}{2}, 1 \right) \equiv \vec{v}_s(-2, -3, 2) \end{cases}$$

Estudiamos la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \vec{P_r P_s} \end{array} \right]$, es decir: $M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a-0 \\ -2 & -3 & \frac{5+a}{2} - a \\ 0 & 2 & 0-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -2 & -3 & \frac{5-a}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$

Rango de M , $\{M \text{ es } 3 \times 2, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 2\}$

$$|I| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Rango de M' , $\{M' \text{ es } 3 \times 3, \text{ luego máximo rango de } M' \text{ es } 3 \text{ y } \text{ran}(M') \geq \text{ran}(M) = 2\}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & -3 & \frac{5-a}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4a - 2 \cdot \frac{5-a}{2} + 4 = 3 - 4a - 5 + a + 4 = 2 - 3a. \quad 2 - 3a = 0; \quad 2 = 3a; \quad a = \frac{2}{3}.$$

Para $a = \frac{2}{3}$, $|M'| = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2 = \text{ran}(M)$ las rectas r y s se cortan en un punto.

Para $a \neq \frac{2}{3}$, $|M'| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3 \neq 2 = \text{ran}(M)$ las rectas r y s se cruzan.

Solución: las rectas r y s se cortan en un punto cuando $a = \frac{2}{3}$ y se cruzan cuando $a \neq \frac{2}{3}$.

3.1.2 Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

Del apartado anterior, sabemos que las rectas se cortan en un punto para $a = \frac{2}{3}$.

Obtengamos el punto de corte resolviendo el sistema:
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = \frac{2}{3} \\ 2x + y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{sustituyendo el valor de } z \text{ de la}$$

4ª ecuación en las otras,
$$\begin{cases} -x + 2y + 2 \cdot 1 = 5 \\ x + 1 = \frac{2}{3} \\ 2x + y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 5 - 2 \\ x = \frac{2}{3} - 1 \\ 2x + y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ x = \frac{-1}{3} \\ 2x + y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{sustituyendo el}$$

valor de x de la 2ª ecuación en las otras,

$$\begin{cases} -\frac{-1}{3} + 2y = 3 \\ 2 \cdot \frac{-1}{3} + y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} + 2y = 3 \\ -\frac{2}{3} + y = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y = 3 - \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y = \frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow y = \frac{4}{3}$$

Solución: para $a = \frac{2}{3}$ el punto de corte entre r y s es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right)$

3.1.3 Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

$$d(P,O)=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+(1-0)}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}+1}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

Solución: $d(P,O)=\frac{\sqrt{26}}{3} \text{ u.l.}$

Tu Profe al Rescate

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

Solución:

3.2.1 ¿Plano π_1 ? $\pi_1 \perp \pi$ y $r \subset \pi_1$.

Siendo $\vec{v}_r$ (vector director de r) y $\vec{n}_\pi$ (vector perpendicular a π), de las ecuaciones de π y r deducimos que: $\vec{n}_\pi(2, 1, 0)$, $\vec{v}_r(1, -2, 0)$ y $P_r(1, -1, 1)$.

$\pi_1 \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es vector director de π_1 .

$r \subset \pi_1 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r & \text{es vector director de } \pi_1 \\ P_r & \text{punto de } \pi_1 \end{cases}$

¿ $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_r$ son paralelos? $\frac{2}{1} = \frac{1}{-2} = \frac{0}{0}$? No, luego son vectores directores de π_1 .

De π_1 conocemos $\begin{cases} \text{vectores directores: } \begin{cases} \vec{v}_r \\ \vec{n}_\pi \end{cases} \\ \text{punto de } \pi_1: P_r \end{cases}$

La ecuación del plano π_1 será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad (z-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad (z-1)(4+1) = 0; \quad 5(z-1) = 0; \quad z-1 = 0$$

Solución: $\pi_1: z - 1 = 0$.

3.2.2 ¿Plano π_2 ? $\pi_2 // \pi$ y $r \subset \pi_2$.

Como $\pi_2 // \pi \rightarrow \pi_2: 2x + y + D = 0$

Como $r \subset \pi_2 \rightarrow P_r \in \pi_2 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 0; \quad 1 + D = 0; \quad D = -1$

Solución: $\pi_2: 2x + y - 1 = 0$.

4.1 Consideramos la función real de variable real $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

Solución:

$f(x)$ es el valor absoluto de un polinomio de 2º grado, es fácilmente representable y a partir de la representación iremos resolviendo cada uno de los apartados.

1º Representemos $y = 2x^2 - 3$ en $\mathcal{R}$ (es una parábola).

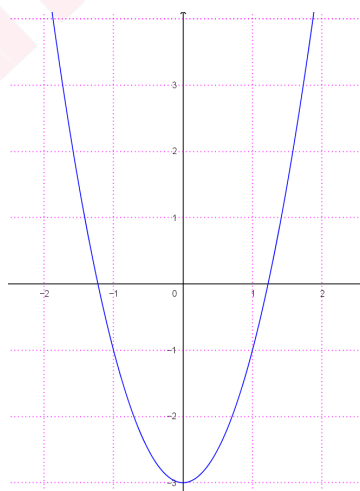
Puntos de corte con ejes coordenados,

$$x = 0, \quad y = 2 \cdot 0^2 - 3 = -3, \quad (0, -3)$$

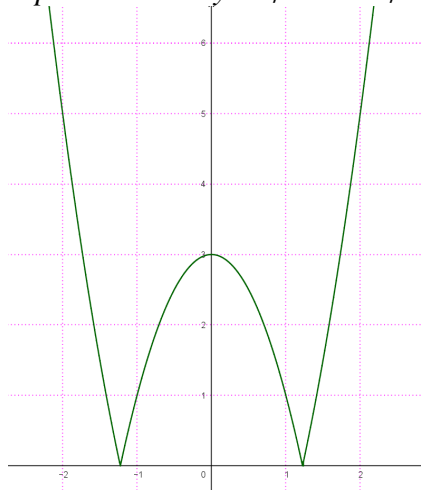
$$y = 0, \quad 2x^2 - 3 = 0, \quad 2x^2 = 3, \quad x^2 = \frac{3}{2}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1.22 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0 \right) \\ \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0 \right) \end{array} \right.$$

Vértice de la parábola que como el coeficiente de x^2 es positivo será el mínimo de y ,
 $y' = 4x, \quad 4x = 0, \quad x = 0 \quad \text{el vértice es } (0, -3)$

La representación gráfica de $y = 2x^2 - 3$ será:



2º Representamos $y = \sqrt{2x^2 - 3}$ en $\mathcal{R}$ por simetría con respecto al eje OX,



3° Representamos $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$

$$x = -1, \quad f(-1) = |2 \cdot (-1)^2 - 3| = 1$$

$$x = 5, \quad f(5) = |2 \cdot 5^2 - 3| = 47$$

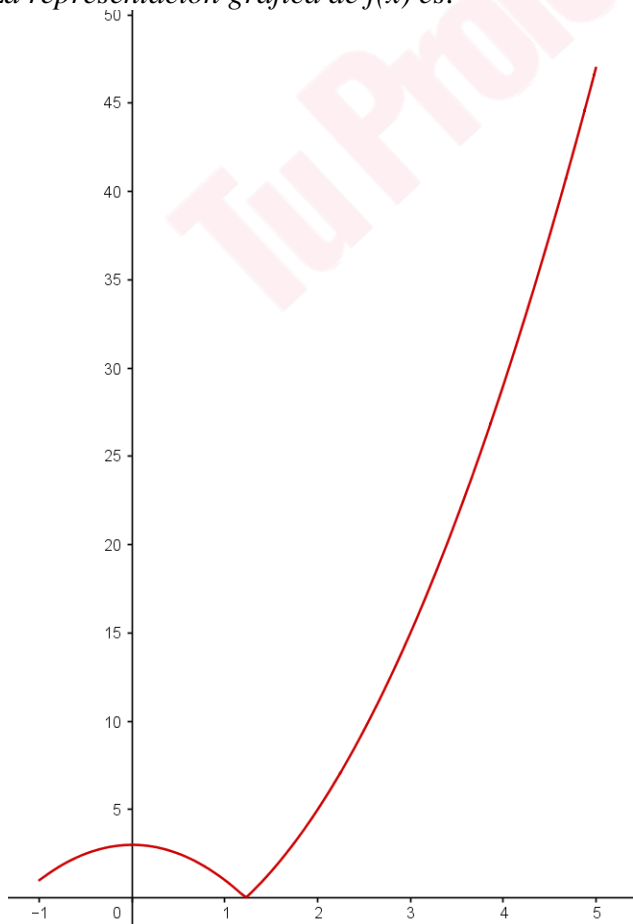


En el intervalo $\left(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ $f(x) = -2x^2 + 3$ y en $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right)$ $f(x) = 2x^2 - 3$.

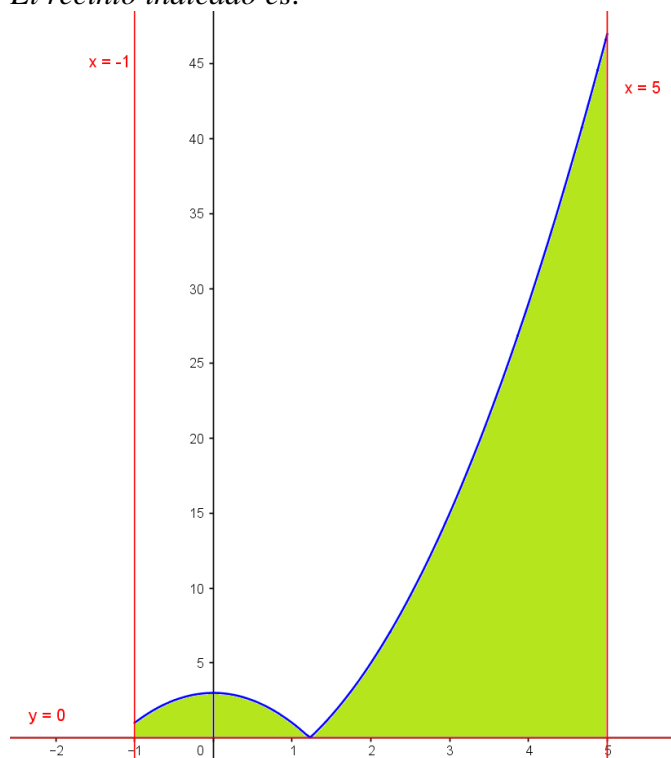
4.1.1 $f(x)$ es creciente en $(-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right)$ y es decreciente en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

4.1.2 El mínimo absoluto es $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ y el máximo absoluto $(5, 47)$.

4.1.3 La representación gráfica de $f(x)$ es:



4.1.4 Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.
El recinto indicado es:

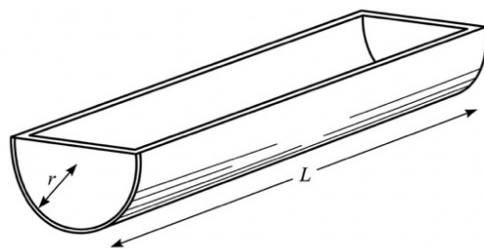


El área del recinto pedido se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^{\sqrt{6}/2} (-2x^2 + 3) dx + \int_{\sqrt{6}/2}^5 (2x^2 - 3) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^{\sqrt{6}/2} + \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\sqrt{6}/2}^5 = \\
 &= \left(\left(-\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} + 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) - \left(-\frac{2(-1)^3}{3} + 3(-1) \right) \right) + \left(\left(\frac{2 \cdot 5^3}{3} - 3 \cdot 5 \right) - \left(\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{3} - 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right) \right) = \\
 &= \left(\left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - 3 \right) \right) + \left(\left(\frac{250}{3} - 15 \right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{2} \right) \right) = \sqrt{6} + \frac{7}{3} + \frac{205}{3} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + \frac{212}{3} \cong \\
 &\cong 75'5656
 \end{aligned}$$

Solución: el área del recinto mide $\left(2\sqrt{6} + \frac{212}{3} \right) \text{ u.a.} \approx 75'5656 \text{ u.a.}$

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600 \pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Solución:

4.2.1 Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

$$V_{\text{comedero}} = \frac{\pi r^2 L}{2}$$

Para tener la expresión anterior sólo en función de r debemos buscar una relación entre L y r .

$$\text{El área total del comedero es: } 2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) + \frac{2 \pi r L}{2} = \pi r^2 + \pi r L = \pi (r^2 + r L)$$

De los datos del problema el área total del comedero es $600 \pi \text{ cm}^2$.

$$\text{Por lo tanto, } \pi (r^2 + r L) = 600 \pi; \quad r^2 + r L = 600; \quad r L = 600 - r^2; \quad L = \frac{600 - r^2}{r}$$

$$\text{Finalmente, } V_{\text{comedero}} = \frac{\pi r^2 \left(\frac{600 - r^2}{r} \right)}{2} = \frac{\pi r (600 - r^2)}{2} = \frac{\pi}{2} (600 r - r^3)$$

Como r es el radio del semicírculo, $r > 0$.

$$\text{Por tanto, } V_{\text{comedero}} = \frac{\pi}{2} (600 r - r^3) \quad r > 0.$$

4.1.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Debemos calcular el máximo de V ,

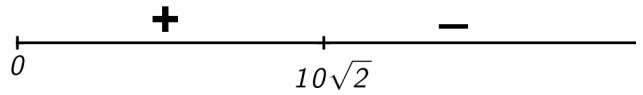
$$V'_{\text{comedero}} = \frac{\pi}{2} (600 - 3 r^2); \quad \frac{\pi}{2} (600 - 3 r^2) = 0; \quad 600 - 3 r^2 = 0; \quad 600 = 3 r^2; \quad r^2 = \frac{600}{3}; \quad r^2 = 200;$$

$$(\text{como } r > 0) \quad r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \cong 14'1421$$

Calculemos el signo de V'_{comedero} a la izquierda y derecha de $r = 10\sqrt{2}$,

$$V'(l) = \frac{\pi}{2} (600 - 3 \cdot l^2) = \frac{597}{2} \pi > 0$$

$$V'(20) = \frac{\pi}{2} (600 - 3 \cdot 20^2) = -300 \pi < 0$$



En $r = 10\sqrt{2}$ hay un máximo local. Como a la izquierda de $r = 10\sqrt{2}$ la función es creciente y a su derecha decreciente este máximo local es el absoluto de V_{comedero} .

Para $r = 10\sqrt{2}$

$$L = \frac{600 - (10\sqrt{2})^2}{10\sqrt{2}} = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \cong 28'2843$$

$$V_{\text{comedero}} = \frac{\pi (10\sqrt{2})^2 \cdot 20\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \cdot 200 \cdot 20\sqrt{2}}{2} = 2000 \sqrt{2} \pi \cong 8885'7659$$

El volumen del comedero es máximo para $r = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ y $L = 20\sqrt{2} \text{ cm}$ y este volumen es $2000 \sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$.

Tu Profeta al Rescate