

Problema 1.1. Dada la matriz $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular, en función de α , el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (1,3 puntos).
- Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a $1/66$. (2 puntos).

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz por Sarrus,

$$|A(\alpha)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = -18 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4\alpha - 3\alpha^2 + 6\alpha - 2\alpha + 48 = \alpha^2 + 30$$

b) De lo obtenido anteriormente, sabemos que el determinante de la matriz $A(\alpha)$ es distinto de cero (para cualquier valor de α , $\alpha^2 + 30 \neq 0$)

Como el determinante de $A(\alpha)$ es distinto de cero, existe la inversa de la matriz $A(\alpha)$. Y además sabemos que,

$$|A^{-1}(\alpha)| = \frac{1}{|A(\alpha)|} = \frac{1}{\alpha^2 + 30}$$

$$\text{buscamos } \alpha / \frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66} \rightarrow \alpha^2 + 30 = 66 \rightarrow \alpha^2 = 36 \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{36} \rightarrow \alpha = \pm 6$$

Solución: $\alpha_1 = -6$ ó $\alpha_2 = 6$

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 7y + \alpha z = 0 \end{cases}$$
, se pide:

- Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (1,5 puntos).
- Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. (1,8 puntos).

Solución:

Estudiamos el sistema.

Llamando A a la matriz de coeficientes y A' a la matriz ampliada,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 4 & | & 0 \\ 5 & 7 & \alpha & | & 0 \end{pmatrix}$$

Como el sistema es homogéneo, sabemos que es compatible ($\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$).

Estudiamos el máximo rango posible de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha + 14 + 20 - 15 - 28 - 2\alpha = \alpha - 9$$

$$\alpha - 9 = 0 \rightarrow \alpha = 9$$

Para $\alpha \neq 9$, $|A| \neq 0$ luego $\text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado como el sistema es homogéneo la solución es la trivial, $x = y = z = 0$

Para $\alpha = 9$, estudiemos la matriz A resultante. Para este valor de α sabemos que $|A| = 0$, luego $\text{rang}(A) \leq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Busquemos un menor de orden dos no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

luego $\text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

De lo estudiado anteriormente, las respuestas a cada uno de los apartados será:

a) El sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (solución trivial) para $\alpha \neq 9$

b) El valor de α que hace al sistema indeterminado es $\alpha = 9$

Para este valor de α la solución será:

Utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir,

$$\begin{cases} x + y = -z \\ 2x + 3y = -4z \end{cases} \quad \text{Resolviéndolo por Cramer,}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3z + 4z}{1} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4z + 2z}{1} = -2z$$

Por tanto, para $\alpha = 9$ la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

Tu Profe al Rescate

Problema 2.1. Dados los puntos $P = (3, -1, 4)$ y $Q = (1, 0, -1)$, y el plano π de ecuación $\pi: x - 2y + 2z + 5 = 0$, se pide calcular razonadamente:

- La ecuación de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π . (1,4 puntos).
- La ecuación de los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π . (1 punto).
- La ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π . (0,9 puntos).

Solución:

a) Recta r : pasa por P y es $\perp$ a π .

El vector director de la recta, $\vec{v}_r$, será el vector ortogonal al plano π , $\vec{n}_\pi$, y $\vec{n}_\pi = (1, -2, 2)$.
Por lo tanto, de la recta r conocemos,

$$\begin{cases} \text{Punto } P(3, -1, 4) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = (1, -2, 2) \end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

Ecuación vectorial $(x, y, z) = (3, -1, 4) + \lambda(1, -2, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación continua $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2}$

b) Los planos que pasan por P y son perpendiculares al plano π contienen la recta r del apartado anterior. Por lo tanto las ecuaciones pedidas podemos obtenerlas a partir de la ecuación de la recta r dada como intersección de dos planos.

De la ecuación continua de r :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} \\ \frac{x-3}{1} = \frac{z-4}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+6 = y+1 \\ 2x-6 = z-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+6-1=0 \\ 2x-z-6+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$$

El haz de planos que contienen a la recta r será: $\lambda(2x+y-5) + \mu(2x-z-2) = 0$ y esta es la ecuación de los planos pedidos.

c) Ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π .

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es un vector director de π'

Como P y $Q \in \pi' \rightarrow \vec{PQ}$ es otro vector director de π'

$$\vec{n}_\pi = (1, -2, 2) \quad \text{y} \quad \vec{PQ} = (1, 0, -1) - (3, -1, 4) = (-2, 1, -5)$$

Elegimos como punto del plano π' , por ejemplo, $P(3, -1, 4)$. La ecuación del plano π' será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Desarrollando por la primera fila,}$$

$$(x-3) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(10-2) - (y+1)(-5+4) + (z-4)(1-4) = 0$$

$$(x-3)8 - (y+1)(-1) + (z-4)(-3) = 0$$

$$8x - 24 + y + 1 - 3z + 12 = 0$$

$$8x + y - 3z - 11 = 0$$

Luego, la ecuación del plano π' : $8x + y - 3z - 11 = 0$

Tu Profe al Rescate

Problema 2.2. Sea π el plano de ecuación $\pi: 3x + 2y + 4z - 12 = 0$, se pide calcular razonadamente:

- Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π . (1,2 puntos).
- Los tres puntos A , B y C , intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (0,6 puntos).
- Los tres ángulos del triángulo ABC . (1,5 puntos).

Solución:

a) Ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 5 unidades de π .

Los planos paralelos a π tienen por ecuación, $\pi': 3x + 2y + 4z + D = 0$.

Como estos dos planos son paralelos, la distancia entre ellos la calculamos de la siguiente forma:

$d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi')$, siendo P_π un punto cualquiera del plano π .

P_π podemos obtenerlo para $x = y = 0$, en la ecuación del plano π , luego: $4z - 12 = 0 \rightarrow z = 3 \rightarrow P_\pi(0, 0, 3)$

$$d(P_\pi, \pi') = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + D|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{|12 + D|}{\sqrt{9 + 4 + 16}} = \frac{|12 + D|}{\sqrt{29}}$$

$$y \text{ debe ser } \frac{|12 + D|}{\sqrt{29}} = 5 \rightarrow \begin{cases} \frac{12 + D}{\sqrt{29}} = 5 \rightarrow 12 + D = 5\sqrt{29} \rightarrow D = -12 + 5\sqrt{29} \\ \frac{12 + D}{\sqrt{29}} = -5 \rightarrow 12 + D = -5\sqrt{29} \rightarrow D = -12 - 5\sqrt{29} \end{cases}$$

Finalmente, las ecuaciones de los planos pedidos son:

$$\pi_1: 3x + 2y + 4z - 12 + 5\sqrt{29} = 0 \quad \wedge \quad \pi_2: 3x + 2y + 4z - 12 - 5\sqrt{29} = 0$$

b) Los tres puntos A , B y C , intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A , corte del plano π con eje X

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow A(4, 0, 0)$$

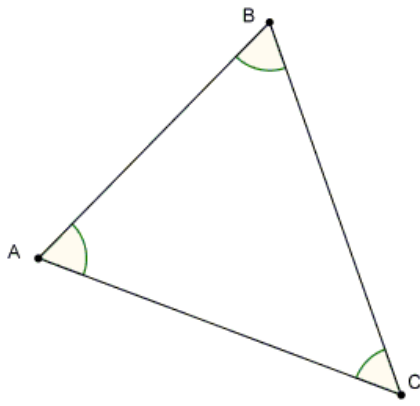
B , corte del plano π con eje Y

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 2y - 12 = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$$

C , corte del plano π con eje Z

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 4z - 12 = 0 \rightarrow z = 3 \rightarrow C(0, 0, 3)$$

c) Los tres ángulos del triángulo ABC .



$$\hat{A} = \left(\vec{AB}, \vec{AC} \right)$$

$$\vec{AB} = (0, 6, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 6, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, 0, 3) - (4, 0, 0) = (-4, 0, 3)$$

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{|(-4, 6, 0) \cdot (-4, 0, 3)|}{\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 0^2} \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} = \\ &= \frac{|16|}{\sqrt{16 + 36} \sqrt{16 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{52} \sqrt{25}} = \frac{16}{5\sqrt{52}} \end{aligned}$$

$$\hat{A} = 63^{\circ} 65' 60''$$

$$\hat{B} = \left(\vec{BA}, \vec{BC} \right)$$

$$\vec{BA} = (4, -6, 0) \quad \left(\text{es el opuesto del } \vec{AB} \text{ calculado anteriormente} \right)$$

$$\vec{BC} = (0, 0, 3) - (0, 6, 0) = (0, -6, 3)$$

$$\cos \hat{B} = \frac{|(4, -6, 0) \cdot (0, -6, 3)|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{|36|}{\sqrt{16 + 36} \sqrt{36 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{52} \sqrt{45}}$$

$$\hat{B} = 41^{\circ} 9' 08''$$

$$\text{Finalmente, } \hat{C} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{B} = 74^{\circ} 43' 52''$$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1,6 puntos).

b) La función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(3) = \frac{\pi}{3}$. (1,7 puntos).

Solución:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x - 2)(x^2 + 9)} = \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}$$

Asíntota horizontal,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18} &= \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales,

Calculemos las raíces del denominador,

$$(x - 2)(x^2 + 9) = 0 \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \text{ sin raíces reales} \end{cases}$$

Por lo que la posible asíntota vertical será la recta $x = 2$, comprobemos si lo es calculando el límite siguiente,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x - 2)(x^2 + 9)} = \frac{2 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 6}{(2 - 2)(2^2 + 9)} = \frac{26}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = 2$ es la asíntota vertical.

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^3 - 2x^2 + 9x - 18} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 12x - 6}{x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 18x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

y obtendríamos el mismo resultado al calcular el límite cuando $x \rightarrow +\infty$; por lo tanto **no hay asíntota oblicua**.

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad / \quad H(3) = \frac{\pi}{3}.$$

$$H(x) = \int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x - 2)(x^2 + 9)} dx =$$

Descomponemos el integrando,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}$$

$$\text{luego, } 2x^2+12x-6 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x-2)$$

Calculamos los valores de A, B y C dando valores a x:

$$x=2 \rightarrow 26=13A \rightarrow A=2$$

$$x=0 \rightarrow -6=2 \cdot 9 + C(-2) \rightarrow -6=18-2C \rightarrow 2C=18+6 \rightarrow 2C=24 \rightarrow C=12$$

$$x=1 \rightarrow 8=10A-B-C; \text{ sustituyendo los valores obtenidos de A y C,}$$

$$8=10 \cdot 2 - B - 12 \rightarrow 8=8-B \rightarrow B=0$$

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2}{x-2} + \frac{0x+12}{x^2+9} = \frac{2}{x-2} + \frac{12}{x^2+9}$$

$$y \quad H(x) = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{12}{x^2+9} \right) dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{12}{x^2+9} dx =$$

calculamos cada integral por separado

$$\int \frac{2}{x-2} dx = 2 \ln|x-2|$$

$$\int \frac{12}{x^2+9} dx = 12 \int \frac{1}{9+x^2} dx = 12 \int \frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+x^2}{9}} dx = 12 \int \frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{x^2}{9}} dx = 12 \int \frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx =$$

$$= 12 \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = 4 \arctg \frac{x}{3}$$

$$^* = 2 \ln|x-2| + 4 \arctg \frac{x}{3} + C$$

Calculamos el valor de C para que se cumpla la condición exigida,

$$H(3) = \frac{\pi}{3}$$

$$H(3) = 2 \ln|3-2| + 4 \arctg\left(\frac{3}{3}\right) + C$$

$$\frac{\pi}{3} = 2 \ln 1 + 4 \arctg 1 + C \rightarrow \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 0 + 4 \frac{\pi}{4} + C \rightarrow \frac{\pi}{3} = \pi + C \rightarrow C = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$$

Finalmente, la función pedida es:

$$H(x) = 2 \ln|x-2| + 4 \arctg\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{2\pi}{3}$$

Problema 3.2. Dada la función real $f(x) = \frac{8}{1+x^2}$, se pide calcular razonadamente:

- Las derivadas primera y segunda de la función $f(x)$. (0,8 puntos).
- Los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$. (1 punto).
- La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$. (1,5 puntos).

Solución:

a) $f(x)$ y $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-8 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16(1+x^2)^2 - (-16x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \left(\frac{\text{simplificando entre}}{(1+x^2)} \right) = \frac{-16(1+x^2) - (-16x)2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{-16 - 16x^2 + 64x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{48x^2 - 16}{(1+x^2)^3} = \frac{16(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$$

b) Puntos de inflexión de $y = f(x)$.

$$y = \frac{8}{1+x^2}$$

Veamos el dominio de esta función, $1+x^2 = 0$; $x^2 = -1$; sin soluciones reales, luego $\text{Dom } y = \mathbb{R}$
Para calcular los puntos de inflexión estudiemos el signo de y''

Del apartado anterior sabemos que $y'' = \frac{16(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$

Busquemos las raíces del numerador y denominador,

$$16(3x^2 - 1) = 0; \quad 3x^2 - 1 = 0; \quad 3x^2 = 1; \quad x^2 = 1/3; \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(1+x^2)^3 = 0; \quad 1+x^2 = 0; \quad \text{sin soluciones reales (visto anteriormente)}$$

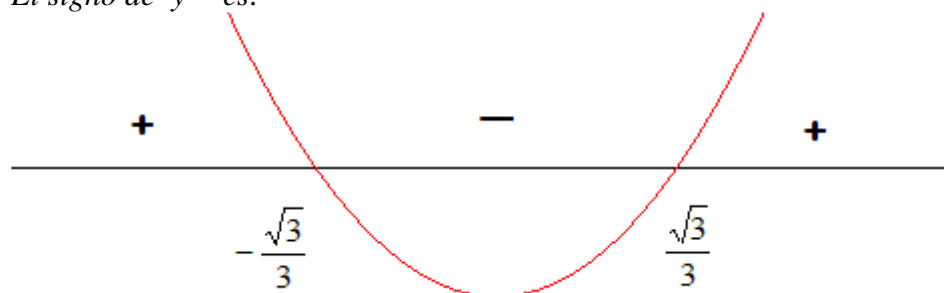
Representando las soluciones obtenidas en la recta real:



En y'' el denominador es $(1+x^2)^3$, pero $1+x^2$ siempre es positivo, luego $(1+x^2)^3$ también, por lo que el signo de y'' sólo depende del numerador.

El numerador es $16(3x^2 - 1)$, como 16 es positivo sólo debemos estudiar el signo de $3x^2 - 1$, que gráficamente es una parábola con coeficiente de x^2 positivo.

El signo de y'' es:



Para los valores de x en que cambia de signo la segunda derivada hay punto de inflexión. Por lo que hay dos puntos de inflexión,

$$\text{Para } x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{8}{1 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{8}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{8}{\frac{12}{9}} = \frac{72}{12} = 6$$

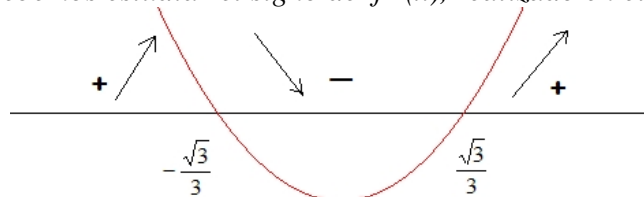
$$\text{Para } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{8}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{8}{1 + \frac{3}{9}} = \frac{8}{\frac{12}{9}} = \frac{72}{12} = 6$$

Los puntos de inflexión son $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 6\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 6\right)$

c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a $y = f(x)$.

La pendiente de las rectas tangentes a $y = f(x)$ es $f'(x)$, buscamos el máximo de $f'(x)$.

Para ello debemos estudiar el signo de $f''(x)$, realizado en el apartado anterior



El máximo relativo se alcanza en

$$\begin{aligned} x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \rightarrow f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{-16\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(1 + \frac{3}{9}\right)^2} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{12}{9}\right)^2} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\frac{144}{81}} = \\ &= \frac{81 \cdot 16 \sqrt{3}}{144 \cdot 3} = \frac{4^2 \cdot 3^4 \sqrt{3}}{4^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Veamos si este máximo relativo es el absoluto. Para ello vamos a representar gráficamente la función

$$g(x) = f'(x) = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}$$

Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$(1+x^2)^2 = 0$; $1+x^2 = 0$; sin soluciones reales

Puntos de corte con los ejes coordenados

$$\left. \begin{aligned} x=0 &\rightarrow y=0 \\ y=0 &\rightarrow \frac{-16x}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow -16x = 0 \rightarrow x=0 \end{aligned} \right\} (0,0) \text{ único punto de corte}$$

Asíntotas

Asíntota vertical, como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, no hay

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16}{x^3} = 0$$

Luego $y = 0$ es la asíntota horizontal

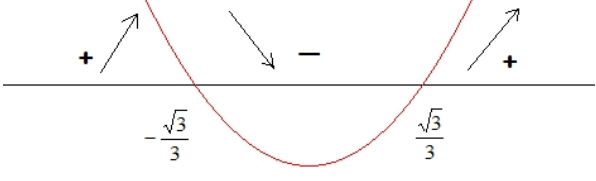
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16}{x^3} = 0$$

Asíntota oblicua,

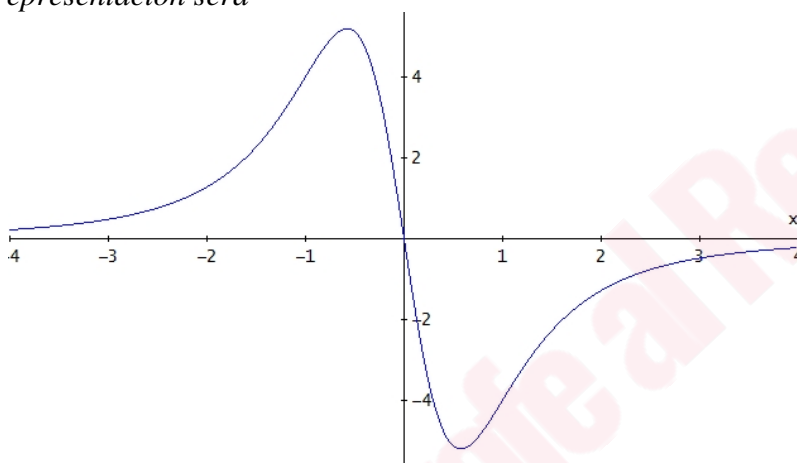
Como $g(x)$ es un cociente de dos polinomios, para que tenga asíntota oblicua debe cumplirse que $\text{grd}(\text{núm}) - \text{grd}(\text{deno}) = 1$, pero lo que ocurre es que $1 - 4 = -3 \neq 1$
No hay asíntota oblicua

Monotonía

Debemos estudiar el signo de $g'(x) = f''(x)$. Este estudio ya lo hemos realizado en el apartado anterior y el resultado fue

	$g(x)$ es creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ $g(x)$ es decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ Luego en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ y en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -3\sqrt{3}\right)$
---	---

La representación será



Por lo que el máximo relativo es el absoluto.

Finalmente, la pendiente máxima es $3\sqrt{3}$.

Problema 4.1. A las 7 de la mañana, una lancha A está situada a 150 km al este de otra lancha B. La lancha A navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha B se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. (3,3 puntos).

Solución:

Gráficamente, el problema podemos resumirlo en,



Llamamos $x =$ tiempo transcurrido

Situamos el origen de coordenadas en el punto B, de forma que inicialmente –a las 7 de la mañana– la lancha B está en $(0,0)$ y la A en $(150,0)$.

Al cabo de x horas,

la lancha B habrá recorrido $30x$ km y estará en el punto $(0, 30x)$

la lancha A habrá recorrido $40x$ km y estará en el punto $(150 - 40x, 0)$

La distancia entre ellas será:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= d((0, 30x), (150 - 40x, 0)) = \sqrt{[0 - (150 - 40x)]^2 + (30x - 0)^2} = \sqrt{(40x - 150)^2 + (30x)^2} = \\ &= \sqrt{1600x^2 - 12000x + 22500 + 900x^2} = \sqrt{2500x^2 - 12000x + 22500} = \sqrt{100(25x^2 - 120x + 225)} = \\ &= 10\sqrt{25x^2 - 120x + 225} \end{aligned}$$

$$d' = 10 \frac{50x - 120}{2\sqrt{25x^2 - 120x + 225}} = 5 \frac{50x - 120}{\sqrt{25x^2 - 120x + 225}}$$

Buscamos el mínimo de d , estudiemos el signo de d' .

Primero obtengamos el dominio de la función d .

$$25x^2 - 120x + 225 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 225}}{2 \cdot 25} = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 22500}}{50} = \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{-8100}}{50} \end{aligned}$$

No tiene soluciones reales

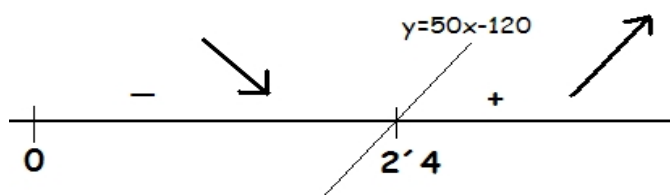
Como el coeficiente de x^2 es $25 > 0$, $25x^2 - 120x + 225 > 0$ para todos los reales.

Y teniendo en cuenta la definición de la función d , mide la distancia entre dos puntos, $\text{Dom } d = [0, +\infty)$

Veamos, ahora, el signo de d' ,

En d' el denominador, según lo obtenido anteriormente, es siempre positivo, por lo tanto el signo de d' sólo depende del numerador. Veámoslo

$$50x - 120 = 0; \quad 50x = 120; \quad x = 120/50 = 2'4$$



Por lo tanto en $x = 2'4$ hay un mínimo relativo que además es el absoluto puesto que la función a la izquierda de $2'4$ es decreciente y a la derecha creciente.

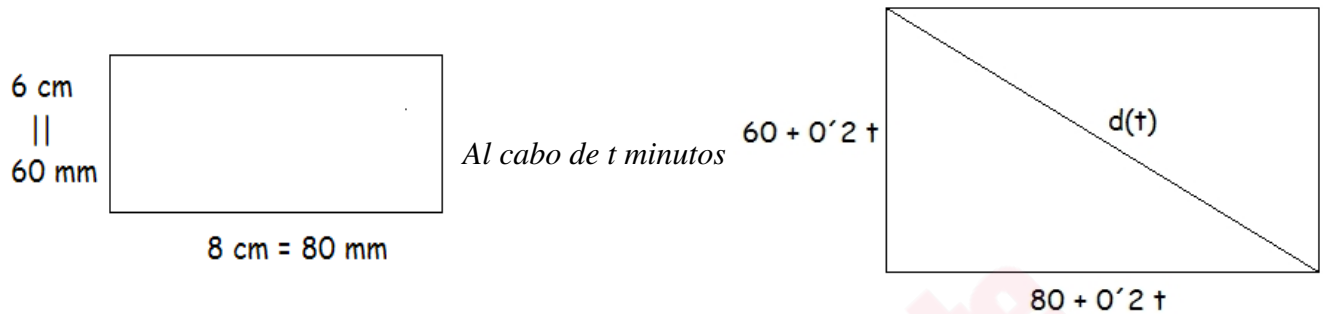
$$2'4 \text{ h} = 2 \text{ h } 24 \text{ min}$$

Por tanto: **ambas lanchas estarán a distancia mínima a las 9h 24min.**

Problema 4.2. Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0,2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm. (3,3 puntos).

Solución:

Gráficamente, el problema podemos resumirlo en,



$$d(t) = \sqrt{(60 + 0.2t)^2 + (80 + 0.2t)^2} = \sqrt{3600 + 24t + 0.04t^2 + 6400 + 32t + 0.04t^2} = \sqrt{10000 + 56t + 0.08t^2} \quad t \geq 0$$

$$d'(t) = \frac{56 + 0.16t}{2\sqrt{10000 + 56t + 0.08t^2}}$$

La velocidad de crecimiento de la diagonal es $v(t) = d'(t)$

Como la dilatación es uniforme, v no varía con el tiempo; por lo tanto calculamos el valor de v calculando, por ejemplo, $v(0) = d'(0)$. Es decir

$$v = d'(0) = \frac{56 + 0.16 \cdot 0}{2\sqrt{10000 + 56 \cdot 0 + 0.08 \cdot 0^2}} = \frac{56}{2\sqrt{10000}} = \frac{56}{2 \cdot 100} = 0.28$$

Finalmente, **la velocidad de crecimiento de la diagonal es de 0.28 mm/min.**