

Junio de 2006 · Convocatoria ordinaria

El examen permite elegir el ejercicio A o el B y resolver tres de sus cuatro problemas. Aquí están desarrollados todos, con los pasos necesarios para poder estudiar cada apartado por separado.

Ejercicio A · Problema 1

Qué se pide. Encontrar el valor de α para el que el sistema tiene solución, resolverlo en ese caso y explicar cómo se colocan los tres planos.

El sistema es

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha, \\ 2x + 6y - 11z = 2, \\ x - 2y + 7z = 1. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

La tercera fila es combinación de las dos primeras:

$$5(1, 2, -3) - 2(2, 6, -11) = (1, -2, 7).$$

Por ello $\det A = 0$, así que no podemos tener rango 3. Sin embargo, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas no se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Para que el sistema sea compatible, los términos independientes deben cumplir la misma relación que las filas:

$$1 = 5\alpha - 2 \cdot 2 \implies 1 = 5\alpha - 4 \implies \alpha = 1.$$

También podemos verlo comprobando el menor de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10(1 - \alpha).$$

Si $\alpha \neq 1$, este menor es distinto de cero, por lo que $\text{rg}(A^*) = 3$, mientras que $\text{rg}(A) = 2$. Por Rouché–Frobenius, el sistema es incompatible.

Para $\alpha = 1$, la misma relación se cumple en los términos independientes y el rango de la ampliada también es 2. Como

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3,$$

el sistema es compatible indeterminado y tiene un parámetro libre. Restamos dos veces la primera ecuación de la segunda:

$$(2x + 6y - 11z) - 2(x + 2y - 3z) = 2 - 2 \implies 2y - 5z = 0.$$

Tomamos $z = t$, entonces $y = \frac{5}{2}t$. Sustituimos en la primera ecuación:

$$x + 2\left(\frac{5}{2}t\right) - 3t = 1 \implies x = 1 - 2t.$$

Así, el conjunto solución es

$$(x, y, z) = \left(1 - 2t, \frac{5}{2}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Posición relativa de los planos

Sus normales son $\vec{n}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{n}_2 = (2, 6, -11)$ y $\vec{n}_3 = (1, -2, 7) = 5\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2$. Ningún par es proporcional, así que cada par de planos se corta en una recta. Las direcciones de esas rectas son paralelas, pues

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-4, 5, 2), \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = -2(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2), \quad \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = -5(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2).$$

Si $\alpha = 1$, las tres rectas de intersección coinciden: los tres planos comparten la recta solución. Si $\alpha \neq 1$, no hay punto común; los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas y distintas.

Conclusión.

Compatible solo para $\alpha = 1$, $S = \left\{ \left(1 - 2t, \frac{5}{2}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejercicio A · Problema 2

Qué se pide. Escribir r y s en forma paramétrica, hallar su intersección y ángulo, y localizar sobre r los puntos que forman triángulos de área 3 con P, Q .

a) Ecuaciones paramétricas

La recta r es la intersección de

$$x + y - z = 5, \quad 2x + y - 2z = 2.$$

Restamos la primera ecuación de la segunda y obtenemos $x - z = -3$. Si ponemos $z = t$, entonces $x = t - 3$; al sustituir, $y = 8$. Por tanto,

$r : (x, y, z) = (-3, 8, 0) + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$

La recta s pasa por $P = (3, 10, 5)$ y $Q = (5, 12, 6)$. Su vector director es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 1),$$

de modo que

$s : (x, y, z) = (3, 10, 5) + u(2, 2, 1), \quad u \in \mathbb{R}.$

b) Intersección y ángulo

Iguamos las coordenadas de las dos rectas. De la coordenada y ,

$$8 = 10 + 2u \implies u = -1.$$

La coordenada z da $t = 5 + u = 4$. Entonces

$$H = (-3 + 4, 8, 4) = (1, 8, 4).$$

El ángulo entre dos rectas es el ángulo entre sus vectores directores. Para $\vec{v} = (1, 0, 1)$ y $\vec{w} = (2, 2, 1)$,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{|3|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tomamos el ángulo agudo entre las rectas:

$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$

c) Puntos que producen área 3

Un punto cualquiera de r es $R(t) = (-3 + t, 8, t)$. Usamos la fórmula del área de un triángulo mediante el producto vectorial:

$$A(t) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR(t)} \right\|.$$

Los vectores que salen de P son

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 1), \quad \overrightarrow{PR(t)} = (t - 6, -2, t - 5).$$

Su producto vectorial es

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}(t) = (2t - 8, 4 - t, 8 - 2t) = (t - 4)(2, -1, -2).$$

Como $\|(2, -1, -2)\| = 3$,

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \cdot 3|t - 4|.$$

Imponemos que el área sea 3:

$$\frac{3}{2}|t - 4| = 3 \implies |t - 4| = 2 \implies t = 2 \text{ o } t = 6.$$

Para $t = 6$, $R(6) = (3, 8, 6)$; para $t = 2$, $R(2) = (-1, 8, 2)$.

Conclusión.

$$M = (3, 8, 6), N = (-1, 8, 2).$$

Ejercicio A · Problema 3

Qué se pide. Dibujar $g(x) = x^2 - 4$ en $[-1, 4]$, hallar los extremos absolutos de $f(x) = |x^2 - 4|$ y calcular el área bajo su gráfica.

La función g es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$; en el problema la estudiamos solo en $[-1, 4]$. No tiene asíntotas: es una parábola definida en todo $\mathbb{R}$. Su derivada y punto crítico son

$$g'(x) = 2x, \quad g'(x) = 0 \implies x = 0.$$

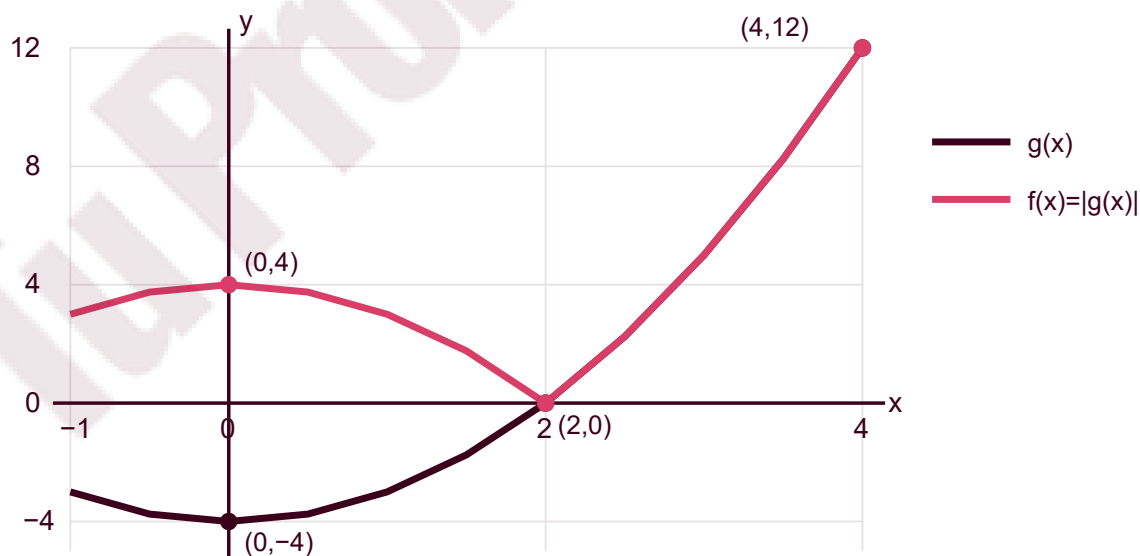
En $[-1, 0)$, $g' < 0$, así que decrece; en $(0, 4]$, $g' > 0$, así que crece. El vértice es $(0, -4)$. Los cortes con el eje OX satisfacen $x^2 - 4 = 0$, es decir $x = \pm 2$; dentro del intervalo solo aparece $(2, 0)$. Los extremos del arco son

$$g(-1) = (-1)^2 - 4 = -3, \quad g(4) = 4^2 - 4 = 12.$$

La gráfica de $f = |g|$ se obtiene reflejando sobre el eje OX la parte negativa de g . Para $x^2 \leq 4$ se tiene $f(x) = 4 - x^2$, y para $x^2 \geq 4$, $f(x) = x^2 - 4$. En el intervalo pedido:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 4, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

El dominio de f también es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de un polinomio está definido para todo real; aquí restringimos el estudio a $[-1, 4]$. No hay asíntotas en ese intervalo.



Para justificar los extremos de f , derivamos en cada tramo. En $x = 2$ hay una punta, así que f' no existe allí. Comprobamos signos en los intervalos:

Intervalo	Prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-1, 0)$	$x = -\frac{1}{2}$	+	crece
$(0, 2)$	$x = 1$	-	decrece
$(2, 4)$	$x = 3$	+	crece

En concreto, $f' = -2x$ en $(-1, 2)$ y $f' = 2x$ en $(2, 4)$. Evaluamos los extremos del intervalo y los puntos críticos:

$$f(-1) = 3, f(0) = 4, f(2) = 0, f(4) = 12.$$

Así, el mínimo absoluto es **0** en $x = 2$, y el máximo absoluto es **12** en $x = 4$. En $x = 0$ hay un máximo local de valor **4**.

El área pedida es la integral de $f(x)$ entre -1 y 4 . Separamos en el punto $x = 2$, donde cambia la fórmula:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx + \int_2^4 (x^2 - 4) dx \\
 &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 \\
 &= \left(8 - \frac{8}{3} - \left(-4 + \frac{1}{3} \right) \right) + \left(\frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right) \\
 &= 9 + \frac{32}{3} = \frac{59}{3}.
 \end{aligned}$$

Conclusión.

$$\min f = 0 \text{ en } x = 2, \max f = 12 \text{ en } x = 4, \mathcal{A} = \frac{59}{3} \text{ u}^2.$$

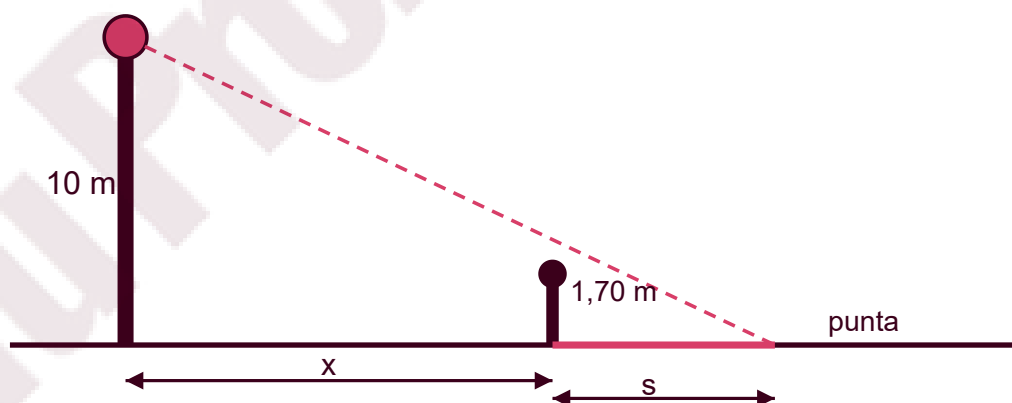
Ejercicio A · Problema 4

Qué se pide. Calcular la longitud de la sombra cuando la persona está a **5** m del farol y la rapidez a la que crece la sombra.

Llamamos x a la distancia horizontal entre la persona y la base del farol, y s a la longitud de la sombra. La persona se aleja a velocidad constante

$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}.$$

Los dos triángulos rectángulos del dibujo son semejantes: el grande tiene altura **10** m y base $x + s$; el pequeño, altura **1,70** m y base s .



Por semejanza de triángulos, la razón altura/base es la misma:

$$\frac{10}{x + s} = \frac{1,70}{s}.$$

Despejamos la sombra:

$$10s = 1,70(x + s) \implies 8,30s = 1,70x \implies s = \frac{1,70}{8,30}x = \frac{17}{83}x.$$

Evaluación cuando $x = 5$ m

$$s = \frac{17}{83} \cdot 5 = \frac{85}{83} \text{ m} \approx 1,024 \text{ m}.$$

Para la rapidez de crecimiento derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{17}{83} \frac{dx}{dt} = \frac{17}{83} \cdot 3 = \frac{51}{83} \text{ m/s} \approx 0,614 \text{ m/s}.$$

La sombra crece a velocidad constante; por eso el resultado vale a los t segundos y también en cualquier otro instante.

Conclusión.

$$s(5) = \frac{85}{83} \text{ m} \approx 1,024 \text{ m}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{51}{83} \text{ m/s} \approx 0,614 \text{ m/s}.$$

Ejercicio B · Problema 1

Qué se pide. Calcular T^{-1} , el determinante de B y sus entradas, sabiendo que $A = T^{-1}BT$.

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Inversa de T

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante no es cero. Sumamos la tercera fila de T a la segunda:

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1 \neq 0.$$

Luego existe T^{-1} . Aplicamos $T^{-1} = \text{adj}(T) / \det T$. La matriz de cofactores y su traspuesta son

$$\text{Cof}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$T^{-1} = -\text{adj}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación:

$$TT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

b) Determinante de B

Usamos la propiedad $\det(XY) = \det X \det Y$:

$$\det A = \det(T^{-1}BT) = \det(T^{-1}) \det(B) \det(T) = \frac{1}{\det T} \det(B) \det T = \det B.$$

Calculamos $\det A$ desarrollando por la primera fila. Como $\det A = \det B$, este cálculo también determina el determinante pedido:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(1) - 2(-1) + (-2) = 2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\det B = \det A = 2$.

c) Entradas de B

Despejamos B sin cambiar el orden de los factores:

$$A = T^{-1}BT \implies TA = BT \implies B = TAT^{-1}.$$

Primero calculamos TA :

$$TA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Después multiplicamos por T^{-1} :

$$\begin{aligned} B &= (TA)T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-1 & 4-4 & 2-4+2 \\ -1+1 & -2+3 & -1+3-2 \\ 2-2 & 4-4 & 2-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusión.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det B = 2, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio B · Problema 2

Qué se pide. Calcular una distancia y el área de ABC , hallar los dos planos pedidos, su recta de intersección en forma paramétrica y el ángulo entre ellos.

a) Distancia y área

Los puntos son

$$A = (4, -4, 9), B = (2, 0, 5), C = (4, 2, 6).$$

El punto medio de AB es

$$I = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{9+5}{2} \right) = (3, -2, 7).$$

Entonces

$$\overrightarrow{IC} = C - I = (1, 4, -1),$$

y la distancia entre dos puntos se obtiene con la norma del vector que los une:

$$d(C, I) = \|\overrightarrow{IC}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Para el área del triángulo usamos la mitad del módulo de un producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 4, -4), \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 6, -3),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = (12, -6, -12).$$

Su módulo es $\sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-12)^2} = 18$, por lo que

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{18}{2} = 9 \text{ u}^2.$$

b) Planos en forma general

Un plano en forma general es $ax + by + cz + d = 0$. Para el plano por A, B, C , tomamos como normal el producto vectorial anterior, simplificado:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Usando $A = (4, -4, 9)$:

$$2(x - 4) - (y + 4) - 2(z - 9) = 0 \implies \boxed{\pi: 2x - y - 2z + 6 = 0}.$$

Para el plano por $L = (1, 1, 4)$, $M = (0, 2, 3)$, $N = (3, 0, 5)$:

$$\overrightarrow{LM} = (-1, 1, -1), \quad \overrightarrow{LN} = (2, -1, 1),$$

$$\overrightarrow{LM} \times \overrightarrow{LN} = (0, -1, -1).$$

Podemos elegir como normal $\vec{n}_{\pi'} = (0, 1, 1)$. Al sustituir L :

$$0(x - 1) + (y - 1) + (z - 4) = 0 \implies \boxed{\pi': y + z - 5 = 0}.$$

c) Recta de intersección y ángulo

Resolvemos conjuntamente las ecuaciones de los planos:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -6, \\ y + z = 5. \end{cases}$$

De la segunda, $y = 5 - z$. Al sustituir en la primera:

$$2x - (5 - z) - 2z = -6 \implies 2x - z = -1 \implies z = 2x + 1.$$

Tomamos $x = t$; entonces $y = 4 - 2t$ y $z = 1 + 2t$. La recta, en forma paramétrica, es

$$\boxed{r: (x, y, z) = (0, 4, 1) + t(1, -2, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El ángulo entre planos es el ángulo agudo entre sus normales. Con $\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$ y $\vec{n}_{\pi'} = (0, 1, 1)$:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{\|\vec{n}_\pi\| \|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{|-3|}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}.$$

Ejercicio B · Problema 3

Qué se pide. Justificar que existe un punto de $y = \ln x$ cuya tangente es paralela a la cuerda AB , localizarlo y hallar la pendiente de esa tangente.

El logaritmo $\ln x$ está definido cuando $x > 0$; por tanto, su dominio es $(0, \infty)$. En $[1, e]$ es continua y derivable en el interior. En el intervalo cerrado dado no hay asíntotas. Si se considera la función en todo su dominio, tiene asíntota vertical $x = 0$, porque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; no tiene horizontal ni oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

Los extremos de la cuerda son $A = (1, 0)$ y $B = (e, 1)$. Su pendiente es

$$m_{AB} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

Por el teorema del valor medio, como $f(x) = \ln x$ es continua en $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$, existe $c \in (1, e)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

Como $f'(x) = 1/x$,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e - 1} \implies c = e - 1.$$

Además, $1 < e - 1 < e$, así que este valor pertenece al intervalo. El punto de la gráfica es

$$P = (e - 1, \ln(e - 1)).$$

La pendiente de la tangente en ese punto es

$$f'(e - 1) = \frac{1}{e - 1} \approx 0,582.$$

Ejercicio B · Problema 4

Qué se pide. Elegir las dimensiones de menor coste para el marco y calcular ese coste.

Llamamos x a la longitud horizontal y y a la vertical, ambas en metros. El coste de los dos lados horizontales es

$$2 \cdot 8x = 16x \text{ €},$$

y el de los dos lados verticales es

$$2 \cdot 12,50y = 25y \text{ €}.$$

La restricción de superficie tiene valor numérico $xy = 1$. Despejamos $y = 1/x$ y expresamos el coste con una sola variable:

$$C(x) = 16x + 25y = 16x + \frac{25}{x}.$$

Como una longitud debe ser positiva y aparece en el denominador, el dominio es $x > 0$.

Comprobamos las asíntotas de esta función de coste: en $x = 0$ hay una vertical, pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = +\infty$; cuando $x \rightarrow +\infty$, $C(x) \rightarrow +\infty$, así que no hay horizontal, pero sí oblicua $C = 16x$, ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (C(x) - 16x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0.$$

Buscamos los puntos críticos:

$$C'(x) = 16 - \frac{25}{x^2} = 0 \implies 16x^2 = 25 \implies x = \pm \frac{5}{4}.$$

Como $x > 0$, solo sirve $x = \frac{5}{4}$. Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados:

$$C'(1) = 16 - 25 = -9 < 0, \quad C'(2) = 16 - \frac{25}{4} = \frac{39}{4} > 0.$$

Así, el coste decrece antes de $5/4$ y crece después. También

$$C''(x) = \frac{50}{x^3} > 0 \quad (x > 0),$$

lo que confirma que $x = 5/4$ es un mínimo.

La otra dimensión es

$$y = \frac{1}{x} = \frac{4}{5}.$$

El coste mínimo resulta

$$C_{\min} = 16 \cdot \frac{5}{4} + 25 \cdot \frac{4}{5} = 20 + 20 = 40 \text{ €}.$$

Conclusión. El coste mínimo, 40 €, se consigue con ancho horizontal $\frac{5}{4} \text{ m} = 1,25 \text{ m}$ y alto vertical $\frac{4}{5} \text{ m} = 0,80 \text{ m}$.