

CATALUÑA · PAU 2014 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ para $a \in \mathbb{R}$.

a) 1 punto

Calcule el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro a .

b) 1 punto

Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la función $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

a) 1 punto

Calcule las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f .

b) 1 punto

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en aquellos puntos en que la recta tangente sea paralela a la recta $y = -5x + 4$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el punto $A = (1, 2, 3)$.

a) 1 punto

Calcule el punto simétrico del punto A respecto de la recta de ecuación $r : (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda)$.

b) 1 punto

Calcule el punto simétrico del punto A respecto del plano que tiene por ecuación $\pi : x + y + z = 3$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Discuta el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

en función de los valores de k .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para $k = 1$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Un nadador está en el mar en un punto N , situado a 3 km de una playa recta, y justo delante de un punto S , situado en la playa a ras del agua; y quiere ir a un punto A , situado también a ras del agua y a 6 km del punto S , de manera que el triángulo NSA es rectángulo en el vértice S . El nadador nada a una velocidad constante de 3 km/h y camina a una velocidad constante de 5 km/h.

a) 1 punto

Si P es un punto entre el punto S y el punto A que está a una distancia x de S , demuestre que el tiempo, en horas, que necesita el nadador para nadar del punto N al punto P y caminar desde el punto P hasta el punto A viene determinado por la expresión $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.

b) 1 punto

Calcule el valor de x que determina el tiempo mínimo que hace falta para ir del punto N al punto A , pasando por P . ¿Cuál es el valor de este tiempo mínimo?

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sean los puntos $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (0, 1, 1)$ y el plano $\pi : x + y + z = 4$.

a) 1 punto

Halle la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por los puntos P , Q y R .

b) 1 punto

Si S es un punto de π , compruebe que el volumen del tetraedro de vértices P , Q , R y S no depende del punto S .

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Calcule el área de la región del plano limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 4x^2$ y $y = 9$.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Dados los planos $\pi_1 : x - 4y + z = 2m - 1$ y $\pi_2 : 2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

a) 1 punto

Determine los valores de m para que los planos π_1 y π_2 se intersequen en una recta y calcule un vector director de la recta resultante que no dependa de m .

b) 1 punto

Sea el plano $\pi : 3x - 2y + 3z = 8$. Estudie la posición relativa del plano π con la recta r definida por la intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $m = 1$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Sean r y s las rectas de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $r : \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ y $s : (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) 1 punto

Compruebe que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro extremo situado sobre la recta s forman un plano.

b) 1 punto

Halle la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano del apartado anterior.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n , demuestre que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$$

b) 1 punto

Si M_1 y M_2 son dos matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, compruebe que el producto $M_1 \cdot M_2$ tiene también la misma forma y que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Demuestre que si A es una matriz cuadrada que satisface la igualdad $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible y A^{-1} satisface $(A^{-1})^2 = I$.

b) 1 punto

Calcule la expresión general de las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$ que satisfacen $A^2 = I$.

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

La función $f(x) = (b - x)e^{ax}$, con a y b constantes, tiene la representación gráfica adjunta y sabemos que pasa por los puntos $A = (0, 2)$ y $B = (2, 0)$, y que en el punto A la recta tangente a la gráfica es horizontal. Calcule los valores de a y b .

b) 1 punto

Calcule $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

Tu Profe al Rescate