

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Ecuación matricial

Sean

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sumando y restando estas igualdades aislamos cada matriz:

$$A = \frac{(A+B) + (A-B)}{2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{(A+B) - (A-B)}{2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz A tiene determinante -2 , de modo que es invertible:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

De $AXA = B$ multiplicamos por A^{-1} a izquierda y derecha, obteniendo $X = A^{-1}BA^{-1}$. Calculamos los productos por separado:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X = (A^{-1}B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Al comprobarlo, $AXA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-4)^2}{(x-3)(x-5)} = 1 + \frac{1}{(x-4)^2 - 1}$$

no está definida cuando el denominador se anula. Por tanto, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$. El corte con el eje X es $(4, 0)$ y el corte con el eje Y es $(0, 16/15)$.

En $x = 3$ y $x = 5$ el numerador no se anula, así que son posibles asíntotas verticales. Los límites laterales confirman que lo son:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty.$$

Los grados del numerador y el denominador coinciden, así que calculamos los límites en ambos infinitos:

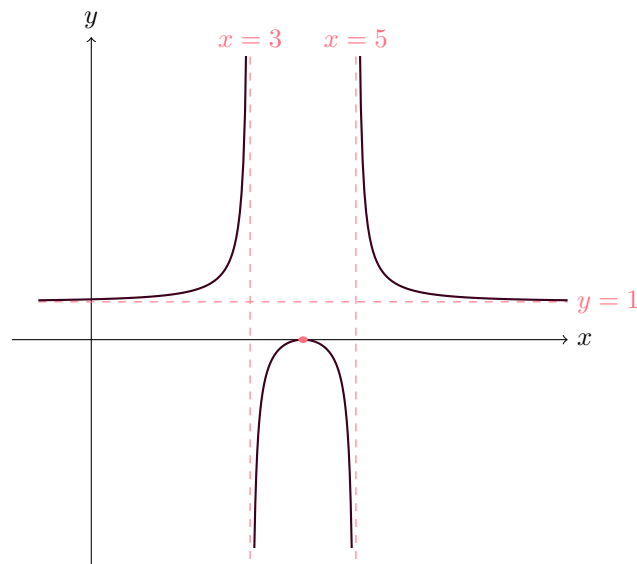
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

Por tanto, las asíntotas son $x = 3$, $x = 5$ e $y = 1$.

Derivamos la expresión simplificada para estudiar el signo:

$$f'(x) = -\frac{2(x-4)}{((x-4)^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio, por lo que el signo de f' es el opuesto al de $x - 4$. La función crece en $(-\infty, 3)$ y $(3, 4)$; decrece en $(4, 5)$ y $(5, +\infty)$. En $x = 4$, f' cambia de positiva a negativa y $f(4) = 0$, luego hay un máximo local en $(4, 0)$.



Máximo local $(4, 0)$; asíntotas $x = 3$, $x = 5$, $y = 1$.

Problema 3 · Efectividad de una vacuna

De las 220 mujeres, 25 contraen la gripe; de los 180 hombres, 23 la contraen. Así, hay 48 personas con gripe y $400 - 48 = 352$ sin gripe.

a) La probabilidad de no tener gripe es

$$P(\text{sin gripe}) = \frac{352}{400} = \frac{22}{25}.$$

b) Hay $220 - 25 = 195$ mujeres sin gripe:

$$P(\text{mujer y sin gripe}) = \frac{195}{400} = \frac{39}{80}.$$

c) Entre las personas sin gripe, $180 - 23 = 157$ son hombres. Por tanto,

$$P(\text{hombre} \mid \text{sin gripe}) = \frac{157}{352}.$$

d) Si sabemos que la persona es mujer, el espacio muestral tiene 220 personas y 195 de ellas no tienen gripe:

$$P(\text{sin gripe} \mid \text{mujer}) = \frac{195}{220} = \frac{39}{44}.$$

$$P(\text{sin gripe}) = \frac{22}{25}, \quad P(\text{mujer y sin gripe}) = \frac{39}{80}, \quad P(\text{hombre} \mid \text{sin gripe}) = \frac{157}{352}, \quad P(\text{sin gripe} \mid \text{mujer}) = \frac{39}{44}.$$

Opción B

Problema 1 · Reparto de una inversión

Sean x y y las cantidades invertidas en las acciones A y B, y z la cantidad depositada. El total y la relación entre dinero en acciones y depósito dan

$$x + y + z = 7000, \quad x + y = z + 2600.$$

Al sustituir la segunda igualdad en la primera obtenemos $2z + 2600 = 7000$, luego $z = 2200$ y $x + y = 4800$. El beneficio total se expresa con las rentabilidades:

$$0,05x + 0,03y + 0,01(2200) = 202.$$

Restando el interés del depósito, las acciones deben aportar 180 euros. Sustituimos $y = 4800 - x$:

$$0,05x + 0,03(4800 - x) = 180 \implies 0,02x = 36 \implies x = 1800, \quad y = 3000.$$

Acciones A: 1800 €; acciones B: 3000 €; depósito: 2200 €.

Problema 2 · Función definida a trozos

La función tiene dominio $[2, 7]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & 2 \leq x < 5, \\ x^2 - 3x - 8, & 5 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

a) Para que sea continua en todo el intervalo, igualamos el límite por la izquierda en $x = 5$ con el valor de la segunda expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{a}{5}, \quad f(5) = 25 - 15 - 8 = 2.$$

La condición $\frac{a}{5} = 2$ da $a = 10$.

b) Para $a = 15$, en el primer tramo

$$f'(x) = -\frac{15}{x^2} < 0 \quad (2 < x < 5),$$

por lo que decrece. En el segundo tramo,

$$f'(x) = 2x - 3 > 0 \quad (5 < x < 7),$$

por lo que crece. En $x = 5$ hay un salto, pues el límite izquierdo vale 3 y $f(5) = 2$; por ello describimos la monotonía por tramos.

c) Entre 5 y 7 corresponde usar $x^2 - 3x - 8$. Una primitiva es $F(x) = x^3/3 - 3x^2/2 - 8x$:

$$\int_5^7 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 8x \right]_5^7 = \frac{62}{3}.$$

$$a = 10; \quad \text{para } a = 15, f \text{ decrece en } [2, 5) \text{ y crece en } [5, 7]; \quad \int_5^7 f(x) dx = \frac{62}{3}.$$

Problema 3 · Probabilidades de dos sucesos

El enunciado da $P(\bar{A}) = 1/3$, así que $P(A) = 2/3$. También conocemos $P(B) = 3/4$ y $P(A \cap B) = 5/8$.

a) Usamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}.$$

b) No ocurrir ninguno es el suceso complementario de la unión:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}.$$

c) Por probabilidad condicionada,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6}.$$

d) Para que fueran independientes debería cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Sin embargo,

$$\frac{5}{8} \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

por lo que no son independientes.

$P(A \cup B) = \frac{19}{24}, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5}{24}, \quad P(A B) = \frac{5}{6}; \quad A, B \text{ no son independientes.}$
--