

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Septiembre de 2007 · Convocatoria extraordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Mezcla de complementos

Sean x los gramos del complemento A e y los del B. Igualamos la cantidad de cada nutriente con la dosis necesaria:

$$2x + 2y = 12 \quad (\text{riboflavina}), \quad 3x + y = 16 \quad (\text{hierro}), \quad 2x + 4y = 14 \quad (\text{carbohidratos}).$$

Las ecuaciones primera y tercera dan $x + y = 6$ y $x + 2y = 7$. Restándolas, $y = 1$ y $x = 5$. La ecuación del hierro se cumple porque $3(5) + 1 = 16$.

Se necesitan 5 g del complemento A y 1 g del complemento B.

Problema 2 · Región factible y extremos

Las restricciones son

$$3x + y \leq 12, \quad x - 2y \geq -3, \quad y \geq \frac{x}{2} - 2, \quad 2x + 3y \geq 1.$$

Despejando y , las dos primeras son cotas superiores y las dos últimas cotas inferiores. Al intersectar las rectas frontera y conservar los puntos que satisfacen las cuatro desigualdades, los vértices factibles son $(-1, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 0)$ y $(2, -1)$. Por ejemplo, $(-1, 1)$ procede de las fronteras $x - 2y = -3$ y $2x + 3y = 1$; $(4, 0)$, de $3x + y = 12$ y $y = x/2 - 2$.

(x, y)	$(-1, 1)$	$(3, 3)$	$(4, 0)$	$(2, -1)$
$f = 3x - 2y$	-5	3	12	8

$f_{\min} = -5$ en $(-1, 1)$, $f_{\max} = 12$ en $(4, 0)$.

Problema 3 · Continuidad, extremos y área

La función por tramos es continua en el interior de cada tramo; comprobamos los puntos de unión $x = 2$ y $x = 4$. En $x = 2$, el límite izquierdo es $2 + 2 = 4$ y el valor del siguiente tramo es $2^2 - 6(2) + 12 = 4$. En $x = 4$, el tramo central vale $16 - 24 + 12 = 4$ y el último vale $-8 + a$. Para que coincidan, $-8 + a = 4$, luego $a = 12$.

En $[0, 4]$, el primer tramo $x + 2$ crece desde 2 hasta 4. En el segundo, $x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3$ tiene mínimo 3 en $x = 3$ y toma el valor 4 en $x = 2$ y en $x = 4$. Al comparar con los extremos del intervalo, el mínimo absoluto es 2 en $x = 0$ y el máximo absoluto es 4 en $x = 2$ y $x = 4$.

Para el área entre $x = 0$ y $x = 3$, la función es positiva: $x + 2 > 0$ en el primer tramo y $(x - 3)^2 + 3 > 0$ en el segundo. Integramos cada expresión en su intervalo:

$$A = \int_0^2 (x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12) dx = 6 + \frac{10}{3} = \frac{28}{3}.$$

$$a = 12; \quad f_{\min} = 2 \text{ en } x = 0; \quad f_{\max} = 4 \text{ en } x = 2, 4; \quad A = \frac{28}{3}.$$

Problema 4 · Independencia y complementarios

Se conocen $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Primero hallamos la intersección con la fórmula de la unión:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,7 = 0,3.$$

Para que fueran independientes, esa probabilidad debería ser $P(A)P(B) = 0,24$, distinto de 0,3; por tanto, no lo son. Las otras probabilidades pedidas son

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,1, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3.$$

$$\text{No son independientes; } P(A \cap \bar{B}) = 0,1; \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Sistema con infinitas soluciones

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x - y + z = 0, \\ -2x + 7y + z = -4. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $x - 2y = 1$. La tercera también conduce a esa misma relación, así que las ecuaciones no determinan tres incógnitas de forma única. Tomamos $y = t$ como parámetro; entonces $x = 1 + 2t$ y, al sustituir en la primera, $z = -2 - 3t$. Los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son ambos 2, menor que el número de incógnitas 3; por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado.

$$(x, y, z) = (1 + 2t, t, -2 - 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Dominio, asíntotas y extremos

La función es $f(x) = \frac{x^2+4}{2x-3}$. El denominador se anula en $x = 3/2$, por lo que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3/2\}$. El numerador es siempre positivo y no hay cortes con el eje X ; el corte con el eje Y es $(0, -4/3)$. En $x = 3/2$, $\lim_{x \rightarrow 3/2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 3/2^+} f(x) = +\infty$, así que $x = 3/2$ es asíntota vertical. Al infinito, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; no hay asíntota horizontal.

Para la oblicua, calculamos primero su pendiente y ordenada:

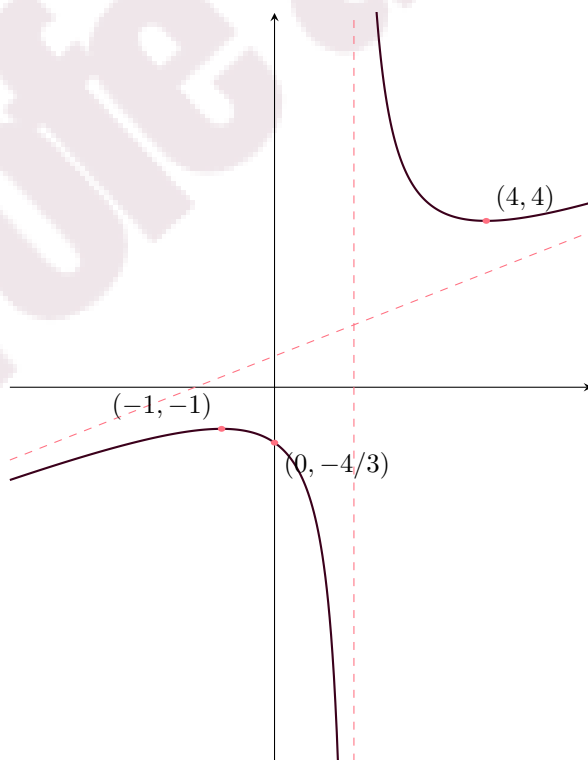
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2(x-4)(x+1)}{(2x-3)^2}.$$

Su signo es positivo en $(-\infty, -1)$ y $(4, \infty)$, y negativo en $(-1, 3/2)$ y $(3/2, 4)$. Hay un máximo local en $(-1, -1)$ y un mínimo local en $(4, 4)$.

La representación incorpora el corte con Y , los extremos y las asíntotas:



$$\text{AV: } x = \frac{3}{2}; \quad \text{AO: } y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}; \quad \max(-1, -1), \quad \min(4, 4).$$

Problema 3 · Extremos locales y área

Para $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$, derivamos para hallar los puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4).$$

La derivada cambia de positiva a negativa en $x = 2$, así que allí hay un máximo local; cambia de negativa a positiva en $x = 4$, donde hay un mínimo local. Sus valores son $f(2) = 23$ y $f(4) = 19$.

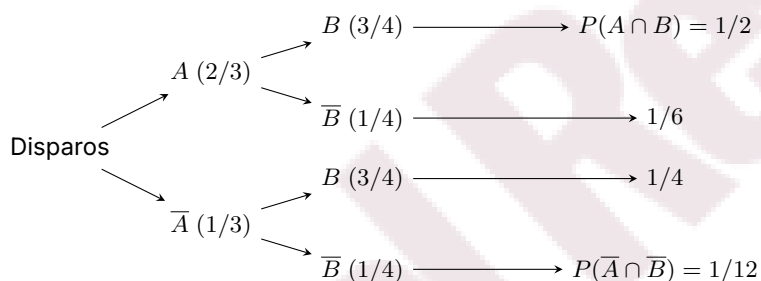
Para calcular el área en $[0, 5]$, comprobamos el signo: los extremos del intervalo y los puntos críticos dan valores $f(0) = 3$, $f(2) = 23$, $f(4) = 19$ y $f(5) = 23$, todos positivos; por tanto, la gráfica queda sobre el eje X . Usamos una primitiva:

$$A = \int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x \right]_0^5 = \frac{385}{4}.$$

Máximo local $(2, 23)$; mínimo local $(4, 19)$; $A = \frac{385}{4}$.

Problema 4 · Dos tiradores

Sean A y B los sucesos «acierta el primer tirador» y «acierta el segundo». Suponiendo independientes los disparos, $P(A) = 2/3$ y $P(B) = 3/4$. Las cuatro rutas del árbol se obtienen multiplicando las probabilidades de las dos ramas:



«Uno acierta y el otro no» reúne dos rutas incompatibles, por lo que sus probabilidades se suman: $1/6 + 1/4 = 5/12$. La probabilidad de que al menos uno acierte es el complementario de que fallen ambos, $1 - 1/12 = 11/12$. Los sucesos «ambos aciertan», «solo uno acierta» y «ninguno acierta» son incompatibles y exhaustivos:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

$P(\text{ambos}) = \frac{1}{2}, \quad P(\text{solo uno}) = \frac{5}{12}, \quad P(\text{ninguno}) = \frac{1}{12}, \quad P(\text{al menos uno}) = \frac{11}{12}.$
