

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, desarrollamos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

Reunimos las fracciones para estudiar qué valor de m hace finito el límite:

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} = \frac{2x - m(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)}.$$

El denominador tiende a cero de orden dos. Para que el cociente no diverja, el numerador también debe anularse a primer orden; su derivada en cero es $2 - m$. Por tanto, necesariamente $m = 2$. Con ese valor, numerador y denominador, así como sus primeras derivadas, se anulan en cero. Aplicamos L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{2(e^x - 1) + 2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x}{4e^x + 2xe^x} = -\frac{1}{2}.$$

Así,

$$m = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Sea $y = k$ la recta horizontal. Para que forme un recinto acotado con $y = x^4$, debe ser $k > 0$. Llamamos $a > 0$ a la abscisa del punto de corte a la derecha; por simetría, los cortes son $(-a, k)$ y (a, k) , con $k = a^4$. El área es la integral de la recta menos la curva:

$$\mathcal{A} = \int_{-a}^a (k - x^4) dx = 2 \int_0^a (a^4 - x^4) dx = 2 \left[a^4 x - \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{8a^5}{5}.$$

Imponemos el área $8/5$:

$$\frac{8a^5}{5} = \frac{8}{5} \implies a = 1, \quad k = a^4 = 1.$$

La recta pedida es

$$y = 1.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Calculamos

$$\det A = 0.$$

Además, la segunda fila de A es dos veces la primera más la tercera:

$$2(2, -4, 2) + (1, -3, 5) = (5, -11, 9).$$

Las dos filas primera y tercera no son proporcionales, así que $\text{rg}(A) = 2$.

Para que la misma dependencia se conserve en la matriz ampliada, los términos independientes deben satisfacer

$$\lambda = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Si $\lambda = 4$, $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = 2 < 3$, y Rouché-Frobenius clasifica el sistema como compatible indeterminado. Si $\lambda \neq 4$, la dependencia se rompe en la columna ampliada, de modo que $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$; el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = 4$, resolvemos usando las ecuaciones primera y tercera, que son independientes. Dividimos la primera por 2:

$$x - 2y + z = \frac{1}{2}, \quad x - 3y + 5z = 2.$$

Tomamos $z = t$. Restando las ecuaciones se obtiene $y = 4t - \frac{3}{2}$, y sustituyendo en la primera, $x = 7t - \frac{5}{2}$. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(7t - \frac{5}{2}, 4t - \frac{3}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r pasa por $Q = (1, 1, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (2, -1, 0)$. Parametrizamos el pie de la perpendicular como $H = Q + t\vec{v}$. El vector $\vec{QA} = A - Q = (0, -2, 0)$ se proyecta sobre $\vec{v}$ con parámetro

$$t = \frac{(A - Q) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(0, -2, 0) \cdot (2, -1, 0)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{2}{5}.$$

Así, $H = (9/5, 3/5, 1)$. El punto simétrico A' verifica que H es el punto medio de AA' :

$$A' = 2H - A = \left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}, 2 \right) - (1, -1, 1) = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1 \right).$$

Para hallar el plano que contiene a r y pasa por A , usamos $\vec{v}$ y $\vec{QA}$. Su producto vectorial

$$\vec{v} \times \vec{QA} = (2, -1, 0) \times (0, -2, 0) = (0, 0, -4)$$

es normal al plano. El punto A tiene $z = 1$, luego la ecuación general es

$$z - 1 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ tiene dominio $\mathbb{R}$. El factor exponencial nunca se anula y el denominador no presenta puntos problemáticos, por lo que no hay asíntotas verticales. Para $x \rightarrow \pm\infty$, $x^2 e^{-x^2} \rightarrow 0$; existe la asíntota horizontal $y = 0$, que la gráfica corta en $(0, 0)$. No hay asíntota oblicua porque ya existe una horizontal.

El signo de la derivada determina los intervalos de crecimiento:

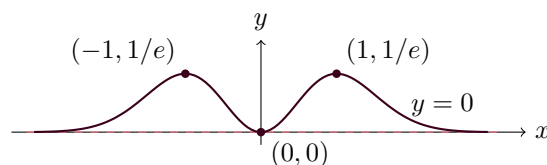
$$f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

Como $e^{-x^2} > 0$, los puntos críticos son $-1, 0, 1$. Probamos un valor en cada intervalo:

Intervalo	Prueba de $f'(x)$	Signo
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) > 0$	+
$(-1, 0)$	$f'(-1/2) < 0$	-
$(0, 1)$	$f'(1/2) > 0$	+
$(1, \infty)$	$f'(2) < 0$	-

Por tanto, crece en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y decrece en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$. Los cambios de signo dan máximos relativos en $x = \pm 1$, con valor $1/e$, y un mínimo relativo en $x = 0$, con valor 0.

c) La función es par, tiene dos máximos simétricos, pasa por el origen y se aproxima al eje OX en ambos extremos:



Opción B - Ejercicio 2

La sugerencia $t = \sqrt{x}$ elimina la raíz del denominador. Entonces $x = t^2$, $dx = 2t dt$, y

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{1 + t} 2t dt = 2 \int \frac{t^3}{t + 1} dt.$$

Dividiendo t^3 entre $t + 1$:

$$\frac{t^3}{t + 1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1) \right) + C = \boxed{\frac{2}{3}x^{3/2} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz AB^t es el producto de una matriz columna por una fila:

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 1) = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sumamos λI :

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\lambda((1+\lambda)(\lambda-1)+1) = \lambda^3.$$

Si $\lambda \neq 0$, el determinante no se anula y el rango es 3. Si $\lambda = 0$, la matriz es C , cuyas filas son una fila no nula, su opuesta y una fila nula; por tanto su rango es 1:

$$\text{rg}(AB^t + \lambda I) = \begin{cases} 3, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

b) La ecuación $CX - X = 2I$ equivale a $(C - I)X = 2I$. Como $C = AB^t$ y $B^t A = 1 - 1 + 0 = 0$, se tiene

$$C^2 = A(B^t A)B^t = 0.$$

Entonces $(I - C)(I + C) = I - C^2 = I$, de modo que $(C - I)^{-1} = -(I + C)$. Así,

$$X = 2(C - I)^{-1} = -2(I + C) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Sus vectores directores son $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$, que no son proporcionales. Tampoco se cortan, pues las dos primeras coordenadas exigirían simultáneamente $t = 1 + \mu$ y $t = 3 + \mu$. Son rectas alabeadas. La distancia entre rectas alabeadas se calcula con

$$d(r, s) = \frac{|(\overrightarrow{PQ}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

donde $P = (0, 0, 0) \in r$, $Q = (1, 3, 0) \in s$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0)$. Calculamos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 2, 0), \quad |\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = |-2 + 6| = 4, \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto,

$$d(r, s) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$