

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. El examen permite elegir tres problemas de uno de los ejercicios; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Precio del billete y distancia

Sea a la parte fija del precio y r el precio por kilómetro. Si la distancia entre A y B es d , los datos dan

$$a + rd = 20, \quad a + 2rd = 32.$$

Restando la primera igualdad de la segunda, $rd = 12$; al sustituirlo, $a = 8$. Para una población a una distancia $d/2$, el precio será

$$a + r\frac{d}{2} = 8 + \frac{rd}{2} = 8 + 6 = 14.$$

El billete hasta la población situada a mitad de distancia cuesta 14 €.

Problema 2 · Unidades sueltas y lotes

Sean x las unidades sueltas y y los lotes de cuatro. La empresa dispone de 16000 unidades del producto, mientras que el material alcanza para empaquetar 15000 unidades sueltas. Cada lote requiere el triple del material de una unidad; por tanto,

$$x + 4y \leq 16000, \quad x + 3y \leq 15000, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio a maximizar es $B = 2x + 7y$. Al ser lineal, basta comparar sus valores en los vértices: $(0, 0)$, $(15000, 0)$, $(0, 4000)$ y la intersección de las dos restricciones. Esta última es

$$\begin{cases} x + 4y = 16000, \\ x + 3y = 15000, \end{cases} \Rightarrow y = 1000, \quad x = 12000.$$

La tabla de beneficios es

(x, y)	$(0, 0)$	$(15000, 0)$	$(12000, 1000)$	$(0, 4000)$
$B = 2x + 7y$	0	30000	31000	28000

Preparar 12000 unidades sueltas y 1000 lotes; el beneficio máximo es 31000 €.

Problema 3 · Coste medio por litro

La producción debe ser positiva para que tenga sentido el coste medio por litro. Si el coste total es

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 800,$$

el coste medio es el cociente entre coste total y litros producidos:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{800}{x}, \quad x > 0.$$

Derivamos y resolvemos la ecuación de puntos críticos:

$$C'_m(x) = \frac{1}{2} - \frac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1600.$$

Como $x > 0$, queda $x = 40$. Para comprobar el cambio de signo, $C'_m(20) = -1,5 < 0$ y $C'_m(80) = 0,375 > 0$; el coste medio decrece antes de 40 litros y crece después. Por tanto, ahí se alcanza el mínimo:

$$C_m(40) = 20 + 5 + 20 = 45 \text{ €/litro.}$$

El coste medio es mínimo al producir 40 litros y vale 45 € por litro.

Problema 4 · Detección de virus por dos antivirus

Sean A_1 y A_2 los sucesos «el antivirus detecta el virus». Como actúan independientemente, la probabilidad de que ninguno lo detecte es el producto de sus probabilidades de fallo:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = (1 - 0,9)(1 - 0,8) = 0,02.$$

El suceso «detectado por al menos uno» es el complementario de «no detectado por ninguno», así que

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

Para que lo detecte A_1 y no A_2 , multiplicamos las probabilidades independientes correspondientes:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = 0,9(1 - 0,8) = 0,18.$$

$$P(\text{detectado}) = 0,98, \quad P(A_1 \text{ y no } A_2) = 0,18.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Recta por dos puntos e intersección

Con los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (3, -2)$, obtenemos un vector director restando coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, -2 - 1) = (2, -3).$$

La recta que pasa por A y tiene ese vector se expresa paramétricamente como

$$r : \quad x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta $3x + y = 5$ tiene un vector director $(1, -3)$. No es proporcional a $(2, -3)$, pues las razones de sus componentes no coinciden; por tanto, las rectas no son paralelas y se cortan. Sustituimos la forma paramétrica en $3x + y = 5$:

$$3(1 + 2t) + (1 - 3t) = 5 \Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

El punto de corte es

$$x = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}, \quad y = 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - 3t, \end{cases} \quad r \cap (3x + y = 5) = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 0 \right) \right\}.$$

Problema 2 · Inversión con beneficio máximo

Sean x e y los euros invertidos en A y B. Las condiciones del enunciado son $y \geq 3000$, $x \leq 2y$, $x + y \leq 12000$ y $x \geq 0$. El beneficio es $G = 0,10x + 0,05y$. Como es una función lineal, buscamos sus valores en los vértices factibles: $(0, 3000)$, $(6000, 3000)$, $(8000, 4000)$ y $(0, 12000)$. El tercero se obtiene de $x = 2y$ y $x + y = 12000$:

$$3y = 12000 \Rightarrow y = 4000, \quad x = 8000.$$

(x, y)	$(0, 3000)$	$(6000, 3000)$	$(8000, 4000)$	$(0, 12000)$
$G = 0,10x + 0,05y$	150	750	1000	600

Invertir 8000 € en A y 4000 € en B; $G_{\max} = 1000$ €.

Problema 3 · Crecimiento y máximo del ozono

El tiempo pertenece a $[0, 20]$ días. La concentración es polinómica y, por tanto, está definida para todo real; para el problema solo consideramos dicho intervalo. El signo de la derivada indica dónde crece o decrece la concentración:

$$C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2, \quad C'(x) = 15 - 1,2x.$$

Buscamos los puntos críticos resolviendo $C'(x) = 0$:

$$15 - 1,2x = 0 \Rightarrow x = 12,5.$$

Comprobamos el signo a ambos lados: $C'(10) = 3 > 0$ y $C'(15) = -3 < 0$. Así, la concentración crece de 0 a 12,5 días y decrece de 12,5 a 20 días. El cambio de positiva a negativa identifica un máximo, cuyo valor es

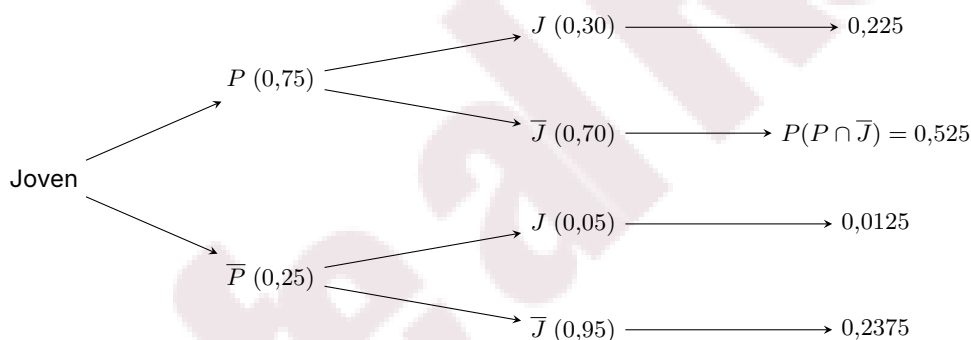
$$C(12,5) = 90 + 15(12,5) - 0,6(12,5)^2 = 183,75 = \frac{735}{4} \mu\text{g}/\text{m}^3.$$

El modelo trata el tiempo como una variable real, por eso el máximo continuo se alcanza a las 12,5 jornadas. Si solo se comparan mediciones hechas al final de días enteros, entonces $C(12)=C(13)=183,6$ microgramos por metro cúbico; ambos días dan el máximo de esa interpretación discreta.

La concentración máxima es $\frac{735}{4} \mu\text{g}/\text{m}^3$ y se alcanza a los 12,5 días.

Problema 4 · Propaganda y uso de un videojuego

Sean P el suceso «recibir propaganda» y J el suceso «utilizar el videojuego». Los datos son $P(P) = 0,75$, $P(\bar{P}) = 0,25$, $P(J | P) = 0,30$ y $P(J | \bar{P}) = 0,05$. Para hallar la probabilidad de que lo use, sumamos los dos caminos que terminan en uso:



$$P(J) = P(P)P(J | P) + P(\bar{P})P(J | \bar{P}) = 0,75 \cdot 0,30 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,2375 = \frac{19}{80}.$$

La probabilidad de recibir propaganda y no usarlo corresponde a una sola rama, con probabilidades sucesivas que se multiplican:

$$P(P \cap \bar{J}) = P(P)P(\bar{J} | P) = 0,75(1 - 0,30) = 0,525 = \frac{21}{40}.$$

$$P(J) = \frac{19}{80} = 0,2375, \quad P(P \cap \bar{J}) = \frac{21}{40} = 0,525.$$