Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2012--2013 · Convocatoria v2

Soluciones originales de las opciones A y B, con el desarrollo de los razonamientos y cálculos principales.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

Sean x e y las cantidades de anillos del primer y del segundo tipo. El oro disponible impone $4x + 3y \leq 48$, y la plata impone $2x + y \leq 20$; además, $x, y \geq 0$. Queremos maximizar los ingresos

$$I(x, y) = 150x + 100y.$$

Como una función lineal alcanza sus extremos en los vértices de la región factible, calculamos sus vértices: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(0, 16)$ y la intersección de las dos restricciones de recursos.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 48, \\ 2x + y = 20 \end{cases} \implies y = 20 - 2x, \quad 4x + 3(20 - 2x) = 48 \implies (x, y) = (6, 8).$$

Evaluamos los ingresos en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(10, 0)$	$(0, 16)$	$(6, 8)$
$I(x, y)$	0	1500	1600	1700

Conviene fabricar 6 anillos del primer tipo y 8 del segundo; los ingresos máximos son $1700\,€$.

Ejercicio 2 · Derivabilidad y extremos absolutos

La función está definida en el intervalo $[2, 5]$ y viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 5, & 2 \leq x \leq 4, \\ 2x + 11, & 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad en $x = 4$, comparamos el valor y los límites laterales. Por la izquierda,

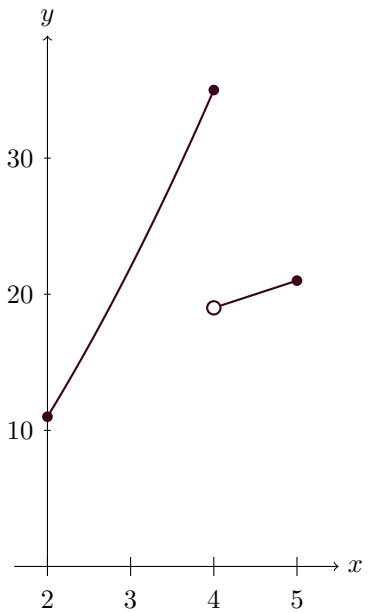
$$f(4) = 4^2 + 6 \cdot 4 - 5 = 35,$$

mientras que por la derecha $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2 \cdot 4 + 11 = 19$. Al no coincidir, hay una discontinuidad de salto y, por tanto, la función no es derivable en $x = 4$.

Para hallar los extremos absolutos, estudiamos cada tramo y también los extremos del dominio. En el primer tramo,

$$f'(x) = 2x + 6 > 0 \quad (2 \leq x \leq 4),$$

de modo que crece de $f(2) = 11$ a $f(4) = 35$. En el segundo, $f'(x) = 2 > 0$, así que crece desde valores mayores que 19 hasta $f(5) = 21$. La gráfica muestra el salto en $x = 4$:



$$\boxed{\min f = 11 \text{ en } x = 2; \qquad \max f = 35 \text{ en } x = 4.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad de sucesos

Sean A y B los sucesos indicados. Como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}27$, se tiene $P(A \cup B) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$. Usamos la fórmula de la unión para hallar la intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0{,}68 + 0{,}20 - 0{,}73 = 0{,}15.$$

Por tanto, $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}20 - 0{,}15 = 0{,}05$. La probabilidad condicionada del apartado c) divide esta probabilidad conjunta entre $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$:

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05}{0{,}32} = \frac{5}{32}.$$

$$\boxed{\text{a) } 0{,}15; \qquad \text{b) } 0{,}05; \qquad \text{c) } \frac{5}{32} = 0{,}15625.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza

La proporción muestral de personas que acceden a internet desde el móvil es $\hat{p} = 240/400 = 0{,}6$, con $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}4$. Para un nivel de confianza del $98{,}5\%$, el valor crítico bilateral es aproximadamente $z_{0{,}9925} \approx 2{,}43$. El intervalo para la proporción poblacional es

$$\hat{p} \pm z_{0{,}9925}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \qquad E = 2{,}43\sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{400}} \approx 0{,}0595,$$

$$IC_{98{,}5\%}(p) = (0{,}6 - 0{,}0595,\ 0{,}6 + 0{,}0595) \approx (0{,}5405,\ 0{,}6595).$$

La amplitud es $2E = 2z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$. Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza, al aumentar n disminuye la amplitud por el factor $1/\sqrt{n}$; al reducir n, aumenta.

$$\boxed{IC_{98{,}5\%}(p) \approx (0{,}5405,\ 0{,}6595); \quad n \uparrow \Longrightarrow \text{ amplitud } \downarrow.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal y matrices

a) En cada vértice evaluamos primero la parte variable de la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$:

Vértice	$A(2,1)$	$B(1,2)$	$C(1,4)$	$D(5,0)$
$2x + 3y$	7	8	14	10

El máximo se da en C, por lo que $14 + k = 19$ y $k = 5$. El mínimo se da en A; con ese valor de k, el mínimo de f es $7 + 5 = 12$.

$$\boxed{k = 5; \quad f_{\text{máx}} = 19 \text{ en } C(1,4); \quad f_{\text{mín}} = 12 \text{ en } A(2,1).}$$

b) La ecuación es $BA + 2X = C$. Como B es una matriz columna y A una fila, su producto es una matriz 3×3:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Despejamos X y hacemos primero la resta de matrices:

$$2X = C - BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo cada entrada entre 2,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Extremos y recta tangente

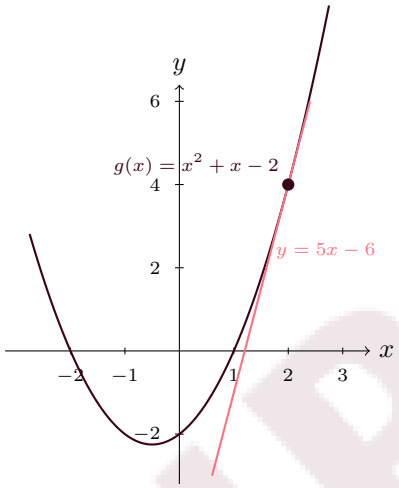
La función es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Para localizar sus extremos relativos, calculamos la derivada y resolvemos $f'(x)=0$:

$$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1), \qquad x=-2,\ 1.$$

La segunda derivada permite clasificar los puntos: $f''(x)=2x+1$, de modo que $f''(-2)=-3<0$ da un máximo y $f''(1)=3>0$ da un mínimo. Sus valores son

$$f(-2)=-\frac{8}{3}+2+4+3=\frac{19}{3}, \qquad f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+3=\frac{11}{6}.$$

Para la tangente a $g(x)=f'(x)=x^2+x-2$ en $x=2$, usamos $y-g(2)=g'(2)(x-2)$. Como $g(2)=4$ y $g'(2)=2\cdot 2+1=5$, resulta $y-4=5(x-2)$, es decir, $y=5x-6$. La figura muestra la parábola y la tangente:



Máximo relativo: $\left(-2,\dfrac{19}{3}\right)$; mínimo relativo: $\left(1,\dfrac{11}{6}\right)$; $y_{\text{tangente}}=5x-6$.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada

Sean H «tener préstamo hipotecario» y P «tener préstamo personal». La probabilidad de que tenga al menos uno es

$$P(H\cup P)=P(H)+P(P)-P(H\cap P)=0{,}60+0{,}50-0{,}20=0{,}90.$$

Por tanto, la probabilidad de no tener ninguno es $1-0{,}90=0{,}10$. Para el apartado b), la probabilidad de tener hipoteca y no préstamo personal es $P(H\cap\overline{P})=0{,}60-0{,}20=0{,}40$. Dividimos por $P(\overline{P})=1-0{,}50=0{,}50$:

$$P(H\mid\overline{P})=\frac{P(H\cap\overline{P})}{P(\overline{P})}=\frac{0{,}40}{0{,}50}=0{,}8.$$

$$P(\text{ninguno})=0{,}10; \qquad P(H\mid\overline{P})=0{,}8.$$

Ejercicio 4 · Muestreo estratificado y varianza

a) En la afijación proporcional, cada estrato aporta la fracción de muestra que representa en la población. Para el tercer estrato,

$$\frac{n_3}{n}=\frac{N_3}{N}=\frac{1500}{6000}=\frac{1}{4}.$$

Como se han elegido $n_3=15$, se obtiene $n=60$. Las otras asignaciones proporcionales son $n_1=60\cdot 1000/6000=10$ y $n_2=60\cdot 3500/6000=35$.

$$n=60; \qquad (n_1,n_2,n_3)=(10,35,15).$$

b) Las muestras no ordenadas de tamaño 2, equiprobables y extraídas sin reemplazamiento, son $\{1,4\}$, $\{1,7\}$ y $\{4,7\}$; sus medias son $2{,}5$, 4 y $5{,}5$. Su promedio es 4, así que calculamos la varianza como el promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto de ese valor:

$$\text{Var}(\bar{X})=\frac{(2{,}5-4)^2+(4-4)^2+(5{,}5-4)^2}{3}=1{,}5.$$