

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Invertibilidad y ecuación matricial

La matriz A tiene inversa exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 - a(a-3) - 4a + 12 = -2(a-5).$$

Por tanto, $\det A \neq 0$ si y solo si $a \neq 5$.

Para $a = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

De $XA - B = CA$ despejamos $XA = B + CA$, y multiplicamos por A^{-1} a la derecha:

$$CA = (-4 \ 6 \ 9), \quad B + CA = (-5 \ 9 \ 11), \quad X = (B + CA)A^{-1} = \left(-2 \ \frac{3}{2} \ \frac{11}{2}\right).$$

En el apartado c), BA es de orden 1×3 . El producto $C^T B$ es de orden 3×3 , así que para que $D(C^T B)$ también tenga orden 1×3 , la matriz D debe tener una fila y tres columnas.

$$a) a \neq 5; \quad b) X = \left(-2 \ \frac{3}{2} \ \frac{11}{2}\right); \quad c) D \text{ debe ser } 1 \times 3.$$

Ejercicio 2 · Maximización de la producción agrícola

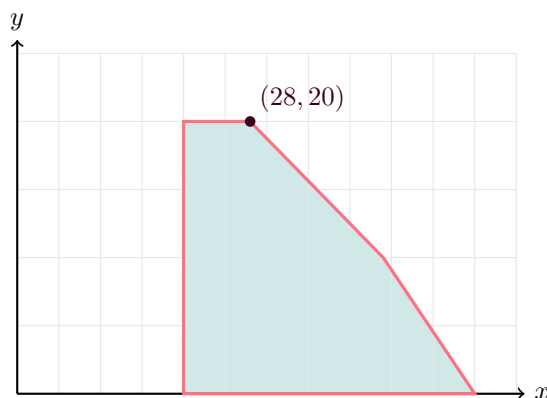
Sean x las hectáreas de secano e y las de regadío. El agua, el abono, los productos fitosanitarios y el mínimo de secano imponen

$$x \geq 20, \quad y \geq 0, \quad 1500y \leq 30000, \quad 100x + 110y \leq 5500, \quad 50x + 80y \leq 3000.$$

La producción total, en kilogramos, es $P(x, y) = 5000x + 10000y$. Los vértices de la región factible son $(20, 0)$, $(55, 0)$, $(44, 10)$, $(28, 20)$ y $(20, 20)$. Evaluamos la producción en ellos:

(x, y)	$(20, 0)$	$(55, 0)$	$(44, 10)$	$(28, 20)$	$(20, 20)$
$P(x, y)$	100000	275000	320000	340000	300000

El mayor valor se alcanza en $(28, 20)$. En esa combinación se utilizan $1500(20) = 30000 \text{ m}^3$ de agua, $100(28) + 110(20) = 5000 \text{ kg}$ de abono y $50(28) + 80(20) = 3000 \text{ kg}$ de fitosanitarios; se respetan las disponibilidades.



$$x = 28 \text{ ha de secano}, \quad y = 20 \text{ ha de regadío}; \quad P_{\max} = 340000 \text{ kg}.$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Derivación

a) Para $f(x) = (x^2 + 2)^3 e^{-2x}$ aplicamos la regla del producto y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(x^2 + 2)^2 e^{-2x} - 2(x^2 + 2)^3 e^{-2x} \\ &= -2e^{-2x}(x^2 + 2)^2(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Para $g(x) = \frac{\ln(1 - x^3)}{(1 - 2x^2)^2}$, el logaritmo exige $1 - x^3 > 0$ y el denominador no puede anularse; así,

$$D_g = (-\infty, 1) \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Escribiendo $g(x) = \ln(1 - x^3)(1 - 2x^2)^{-2}$ y derivando ambos factores,

$$g'(x) = \frac{8x(1 - x^3)\ln(1 - x^3) - 3x^2(1 - 2x^2)}{(1 - x^3)(1 - 2x^2)^3}.$$

b) La tangente a h en $P(1, 2)$ debe pasar por ese punto y tener pendiente cero. La condición $h(1) = 2$ da $a + b = -2$. Además,

$$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3, \quad h'(1) = 0 \implies 6 + 2a = 0,$$

por lo que $a = -3$ y, al sustituir en $a + b = -2$, $b = 1$.

$$f'(x) = -2e^{-2x}(x^2 + 2)^2(x - 1)(x - 2); \quad g'(x) = \frac{8x(1 - x^3)\ln(1 - x^3) - 3x^2(1 - 2x^2)}{(1 - x^3)(1 - 2x^2)^3}; \quad a = -3, \quad b = 1.$$

Ejercicio 4 · Viento: continuidad, extremos y alertas

La función está definida para $0 \leq t \leq 24$. En $t = 10$ comprobamos el empalme:

$$v(10^-) = 10^2 - 8(10) + 60 = 80, \quad v(10^+) = -10^2 + 32(10) - 140 = 80,$$

así que es continua. Las derivadas de las ramas son $2t - 8$ y $-2t + 32$; en $t = 10$ ambas valen 12, por lo que también es derivable.

En la primera rama, $v'(t) = 2t - 8$ se anula en $t = 4$: la velocidad decrece en $[0, 4]$ y crece en $[4, 10]$. En la segunda, $v'(t) = -2t + 32$ se anula en $t = 16$: crece en $(10, 16]$ y decrece en $[16, 24]$. Comparamos los extremos y los valores en los puntos críticos:

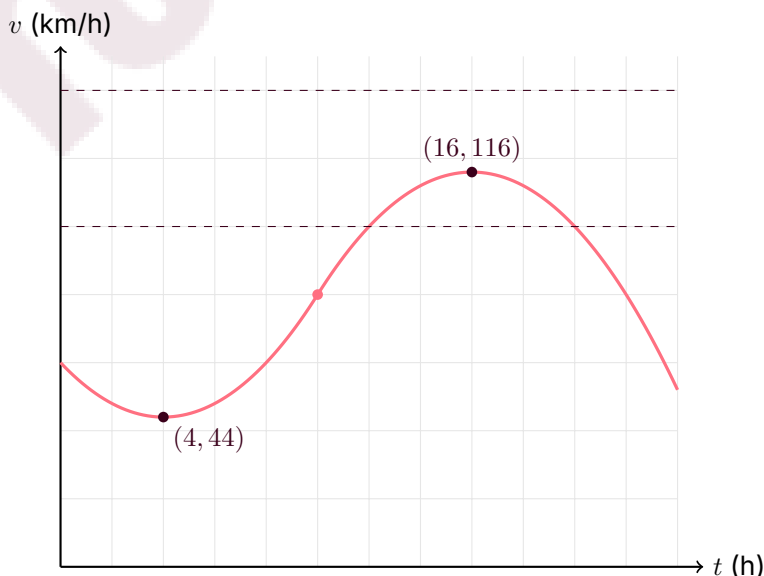
$$v(0) = 60, \quad v(4) = 44, \quad v(10) = 80, \quad v(16) = 116, \quad v(24) = 52.$$

El mínimo absoluto es 44 km/h en $t = 4$ y el máximo absoluto es 116 km/h en $t = 16$.

Para encontrar el aviso naranja, resolvemos en la segunda rama cuándo se superan los 100 km/h:

$$-t^2 + 32t - 140 = 100 \iff t^2 - 32t + 240 = 0 \iff t = 12 \text{ o } t = 20.$$

La velocidad queda entre 100 y 140 km/h para $12 \leq t \leq 20$. La primera rama no alcanza 100 km/h y el máximo diario es 116 km/h, por lo que no hay alerta roja.



$$v_{\min} = 44 \text{ km/h en } t = 4; \quad v_{\max} = 116 \text{ km/h en } t = 16; \quad \text{alerta naranja de 12 a 20 h; sin alerta roja.}$$

Bloque C

Ejercicio 5 · Tabla de contingencia

Llamamos J al suceso «conductor joven» y N a «vehículo nuevo». A partir de los totales, construimos la tabla. Hay $54 - 19 = 35$ vehículos viejos, y de ellos 21 corresponden a conductores jóvenes:

	N	N^c	Total
J	8	21	29
J^c	11	14	25
Total	19	35	54

a) «Sénior y vehículo viejo» corresponde a la celda 14, por lo que la probabilidad es $14/54 = 7/27$. b) La probabilidad de que el conductor sea joven sabiendo que el vehículo es viejo es

$$P(J | N^c) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}.$$

c) La afirmación es falsa. El suceso «sénior y nuevo» tiene 11 casos, mientras que «joven y nuevo» tiene 8; este último es menos probable. La probabilidad mínima es $8/54$.

$P(J^c \cap N^c) = \frac{7}{27}; \quad P(J N^c) = \frac{3}{5}; \quad \text{afirmación falsa: el caso menos probable es joven y nuevo.}$

Ejercicio 6 · Probabilidad total y Bayes

Sean A , O y E los sucesos «procede de Andalucía», «de otra comunidad» y «del extranjero». Sus probabilidades son 0,42, 0,32 y 0,26. Las probabilidades de ser mayor de edad son, respectivamente, 0,65, 0,75 y 0,80; el último valor es el complementario del 20% de extranjeros menores. a) Los tres orígenes son incompatibles y cubren todos los turistas, así que sumamos las probabilidades de los tres caminos que llevan a ser mayor:

$$P(M) = 0,42(0,65) + 0,32(0,75) + 0,26(0,80) = 0,721.$$

b) Para que proceda de Andalucía y sea menor, multiplicamos la probabilidad del origen por la probabilidad condicionada de ser menor:

$$P(A \cap M^c) = 0,42(1 - 0,65) = 0,147.$$

c) Para invertir la condición y calcular el origen sabiendo que es menor, aplicamos Bayes. La probabilidad total de ser menor es $1 - 0,721 = 0,279$:

$$P(E | M^c) = \frac{P(M^c | E)P(E)}{P(M^c)} = \frac{0,20(0,26)}{0,279} = \frac{52}{279} \approx 0,1864.$$

$P(M) = 0,721; \quad P(A \cap M^c) = 0,147; \quad P(E M^c) = \frac{52}{279} \approx 0,1864.$
--

Bloque D

Ejercicio 7 · Afijación proporcional y medias muestrales

a) En cada afijación proporcional, todos los estratos tienen la misma fracción de selección. En la primera muestra, dicha fracción es $25/500 = 0,05$. Como también se seleccionan 30 individuos de E_2 ,

$$\frac{25}{500} = \frac{30}{N_2} \implies N_2 = 600.$$

En la segunda muestra, la fracción es $80/400 = 0,20$. Como se seleccionan 100 individuos de E_4 ,

$$\frac{80}{400} = \frac{100}{N_4} \implies N_4 = 500.$$

Las poblaciones de los estratos son, por tanto, $(N_1, N_2, N_3, N_4) = (500, 600, 400, 500)$.

Para completar la primera asignación, aplicamos su fracción 0,05 a E_3 y E_4 : $n_3 = 0,05(400) = 20$ y $n_4 = 0,05(500) = 25$. La primera muestra es $(25, 30, 20, 25)$ y tiene 100 individuos.

En la segunda asignación, aplicamos la fracción 0,20 a E_1 y E_2 : $n_1 = 0,20(500) = 100$ y $n_2 = 0,20(600) = 120$. La segunda muestra es $(100, 120, 80, 100)$ y tiene 400 individuos.

b) La media poblacional es

$$\mu = \frac{-3 - 1 + 2 + 5 + 7}{5} = 2.$$

Las diez muestras de tamaño 2 tienen medias

$$-2, -\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 6.$$

La media de estos valores es 2. Su varianza es el promedio de los cuadrados de sus desviaciones respecto de esa media:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{10} \sum (\bar{x}_i - 2)^2 = \frac{51}{10} = 5,1.$$

$$\begin{aligned} (N_1, N_2, N_3, N_4) &= (500, 600, 400, 500); \\ \text{1.ª muestra: } (25, 30, 20, 25), n &= 100; \quad \text{2.ª: } (100, 120, 80, 100), n = 400; \\ E(\bar{X}) &= 2, \quad \text{Var}(\bar{X}) = 5,1. \end{aligned}$$

Ejercicio 8 · Intervalo para una proporción

La proporción muestral de habitantes que realizan turismo sostenible es $\hat{p} = 1825/2500 = 0,73$. Para un intervalo bilateral de confianza para una proporción usamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

a) Para un nivel de confianza del 95%, $z_{0,975} \approx 1,96$. El margen de error es

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,73(0,27)}{2500}} \approx 0,0174,$$

y el intervalo resulta $(0,7126, 0,7474)$.

b) Con confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,1701$. Para que el error sea menor que 0,01:

$$n > \frac{z_{0,985}^2 (0,73)(0,27)}{0,01^2} \approx 9282,02.$$

Con el cuantil más preciso $z_{0,985} \approx 2,17009$, el umbral es $n > 9282,02$; como se pide error estrictamente inferior y n debe ser entero, el mínimo es 9283. La tabla redondeada a 2,17 da 9282, diferencia debida al redondeo del cuantil.

c) El error es proporcional a $1/\sqrt{n}$. Al disminuir el tamaño muestral, aumenta el error máximo y, por tanto, la amplitud del intervalo también aumenta.

$$IC_{95\%} \approx (0,7126, 0,7474); \quad n_{\min} = 9283; \quad \text{si } n \text{ disminuye, el intervalo se ensancha.}$$