

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Inversa y sistema matricial

El determinante de A es $\det A = 1(1) - (-1)(2) + 1(-1) = 2$, distinto de cero, así que la matriz es invertible. Su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por el vector de términos independientes se obtiene la solución de $AX = (1, 1, 1)^T$:

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 2; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.2 · Integral y recta tangente

a) Integramos término a término y aplicamos la condición:

$$\int_0^1 (6x^2 + ae^x - 2) dx = [2x^3 + ae^x - 2x]_0^1 = a(e - 1).$$

Como esta integral debe valer $e - 1$ y $e - 1 \neq 0$, resulta $a = 1$.

b) Para $a = 1$, el dominio es $\mathbb{R}$. En $x = 0$, $f(0) = -1$ y $f'(x) = 12x + e^x$, de manera que $f'(0) = 1$. La recta tangente cumple

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0),$$

y por tanto $y = x - 1$.

$$a = 1; \quad y = x - 1.$$

Ejercicio A.3 · Dominio, continuidad y asíntotas

La primera rama está definida para $x \leq 0$ y su denominador $x^2 + 1$ nunca se anula. La segunda rama está definida para $x > 0$, donde $x + 1 \neq 0$. Por ello, $D_f = \mathbb{R}$. Solo hay que comprobar continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Los límites laterales son distintos; en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto finito.

Para $x \rightarrow -\infty$, dividimos la primera expresión:

$$-\frac{x^4}{x^2 + 1} = -x^2 + 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Para $x \rightarrow -\infty$, la función tiende a $-\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal. Además, $f(x)/x \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota oblicua rectilínea en ese extremo. Para $x \rightarrow +\infty$, la otra rama se escribe

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1},$$

por lo que la asíntota oblicua es $y = x - 1$. No hay asíntota vertical: el único punto de discontinuidad, $x = 0$, tiene límites laterales finitos.

$$D_f = \mathbb{R}; \quad x = 0 \text{ discontinuidad de salto}; \quad \text{sin asíntota rectilínea en } -\infty; \quad y = x - 1 \text{ en } +\infty.$$

Ejercicio A.4 · Probabilidad de sucesos

Sean A y B los sucesos del enunciado. Como $P(\bar{B} | A) = 0,89$, se tiene $P(B | A) = 1 - 0,89 = 0,11$. Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = 0,55(0,11) = 0,0605.$$

Para el apartado b), por las leyes de De Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = (A \cup B)^c$. Aplicamos la fórmula de la unión:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0,55 + 0,1 - 0,0605) = 0,4105.$$

$$P(A \cap B) = 0,0605; \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4105.$$

Ejercicio A.5 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

a) Para una media normal con desviación típica conocida, el intervalo es $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Con $\bar{x} = 200$, $\sigma = 10$, $n = 20$ y confianza del 95% ($z_{0,975} = 1,96$):

$$200 \pm 1,96 \frac{10}{\sqrt{20}} = 200 \pm 4,382.$$

b) El error máximo debe cumplir $E = z_{0,95}\sigma/\sqrt{n} < 0,5$. Para confianza del 90%, $z_{0,95} = 1,645$; despejamos n :

$$n > \left(\frac{1,645 \cdot 10}{0,5} \right)^2 = 1082,41.$$

El menor entero que cumple la desigualdad es 1083.

$$IC_{95\%} \approx (195,618, 204,382) \text{ ml}; \quad n_{\min} = 1083.$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Sistema de ecuaciones

Sean c , n y r las cantidades de buñuelos de chocolate, nata y crema. El enunciado proporciona

$$c + n + r = 220, \quad n = 2r, \quad 2r + 3c = 2n.$$

Al sustituir $n = 2r$ en la tercera relación, $3c = 2r$. Tomamos $c = 2k$ y $r = 3k$, con lo que $n = 6k$. La ecuación del total da $11k = 220$, luego $k = 20$.

$$c = 40 \text{ de chocolate}, \quad n = 120 \text{ de nata}, \quad r = 60 \text{ de crema}.$$

Ejercicio B.2 · Programación lineal

Sean x los litros de pintura VERDE1 e y los de VERDE2. Los recursos disponibles imponen

$$0,3x + 0,5y \leq 20, \quad 0,7x + 0,5y \leq 28, \quad 0 \leq x \leq 30, \quad y \geq 0.$$

El beneficio es $B(x, y) = x + 1,2y$. Los vértices factibles son

$$(0, 0), \quad (30, 0), \quad (30, 14), \quad (20, 28), \quad (0, 40).$$

Como el beneficio es lineal, comprobamos cada vértice:

(x, y)	$(0, 0)$	$(30, 0)$	$(30, 14)$	$(20, 28)$	$(0, 40)$
$B = x + 1,2y$	0	30	46,8	53,6	48

$$\text{Para maximizar el beneficio: } 20 \text{ L de VERDE1 y } 28 \text{ L de VERDE2; } B_{\max} = 53,60 \text{ euros.}$$

Ejercicio B.3 · Monotonía y área

a) La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. El signo de su derivada determina dónde crece y decrece:

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = -(3x + 2)(x - 2).$$

Sus puntos críticos son $x = -2/3$ y $x = 2$. La derivada es negativa en $(-\infty, -2/3)$, positiva en $(-2/3, 2)$ y negativa en $(2, +\infty)$. Por tanto, f decrece, después crece y finalmente vuelve a decrecer en esos intervalos.

b) Los puntos de corte de las gráficas se obtienen igualando f y g :

$$-x^3 + 2x^2 + 4x = 4x \iff x^2(2 - x) = 0,$$

que da $x = 0$ y $x = 2$. En el primer cuadrante, $f(x) - g(x) = x^2(2 - x) \geq 0$ entre esos puntos, así que f es la curva superior. El área es

$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 x^2(2 - x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Decrece en } (-\infty, -\frac{2}{3}) \text{ y } (2, +\infty); \quad \text{crece en } (-\frac{2}{3}, 2); \quad A = \frac{4}{3}.$$

Ejercicio B.4 · Probabilidad total y Bayes

Sean O , U y P los sucesos «ayuda obligatoria», «universitaria» y «postobligatoria no universitaria», y sea M que la financia el ministerio. Las tres categorías forman una partición. Por la probabilidad total,

$$P(M) = 0,565(0,138) + 0,24(0,861) + 0,195(0,803) = 0,441195.$$

La probabilidad de que, sabiendo que la ayuda es ministerial, corresponda a enseñanza obligatoria se calcula con Bayes:

$$P(O | M) = \frac{P(O)P(M | O)}{P(M)} = \frac{0,565(0,138)}{0,441195} \approx 0,1767.$$

$$P(M) = 0,441195; \quad P(O | M) \approx 0,1767.$$

Ejercicio B.5 · Distribución de la proporción muestral

La proporción poblacional es $p = 0,30$ y el tamaño muestral es $n = 120$. Como $np = 36$ y $n(1 - p) = 84$ son suficientemente grandes, la proporción muestral se aproxima por una normal de media p y desviación típica $\sqrt{p(1 - p)/n}$:

$$\hat{p} \approx N\left(0,30, \sqrt{\frac{0,30(0,70)}{120}}\right) = N(0,30, 0,0418).$$

«Más del 35%» corresponde a $\hat{p} > 0,35$. Tipificando,

$$P(\hat{p} > 0,35) \approx P\left(Z > \frac{0,35 - 0,30}{0,0418}\right) = P(Z > 1,20) \approx 1 - 0,8849 = 0,1151.$$

$$\hat{p} \approx N(0,30, 0,0418); \quad P(\hat{p} > 0,35) \approx 0,1151.$$