

PAU Andalucía - Matemáticas II

Modelo 4 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Si x es la base del rectángulo, su altura es $y = 1 - \frac{x}{2}$ y $0 \leq x \leq 2$. El área es $A(x) = x(1 - x/2)$, de modo que $A'(x) = 1 - x$. El punto crítico $x = 1$ da el máximo porque $A''(x) = -1 < 0$. Así, la altura es $1/2$ y el rectángulo de mayor área tiene dimensiones $\boxed{1 \times \frac{1}{2}}$ y área $\boxed{\frac{1}{2}}$.

Opción A · Ejercicio 2

Con el cambio indicado $t = e^x$, se tiene $dx = dt/t$ y

$$I = \int \frac{2}{t(2-t)} dt.$$

La descomposición $\frac{2}{t(2-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$ permite integrar:

$$I = \ln |t| - \ln |2-t| + C = \boxed{x - \ln |2 - e^x| + C}.$$

Opción A · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -a & 0 \end{array} \right).$$

Como el sistema es homogéneo, siempre es compatible. El determinante de A es $-(a-2)(a+3)$. Si $a \neq 2, -3$, tiene rango 3 y la única solución es $(0, 0, 0)$. Si $a = 2$, las ecuaciones dan $x = 0$ e $y = -z$, de modo que $(x, y, z) = (0, -t, t)$. Si $a = -3$, dan $z = \frac{3}{2}y$ y $x = -\frac{5}{2}y$, por lo que $(x, y, z) = (-5t, 2t, 3t)$. En estos dos casos $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$, y el sistema es SCI.

Opción A · Ejercicio 4

La recta tiene punto $P = (1, 0, 1)$ y dirección $v = (\alpha, 4, 2)$; el plano tiene normal $n = (2, -1, \beta)$. **a)** Recta perpendicular al plano significa que v es paralelo a n . De $4 = -k$ y $2 = k\beta$ se obtiene $k = -4$, así que

$$\boxed{\alpha = -8, \beta = -\frac{1}{2}}.$$

b) Para que la recta esté contenida, su dirección debe ser perpendicular a n y su punto debe pertenecer al plano. La condición del punto da $2 + \beta = 0$, luego $\beta = -2$. Después $v \cdot n = 0$ implica $2\alpha - 4 + 2\beta = 0$, por lo que $\boxed{\alpha = 4, \beta = -2}$.

Opción B · Ejercicio 1

El dominio es todo $\mathbb{R}$. Derivando,

$$f'(x) = e^{-x}x(2-x).$$

Como $e^{-x} > 0$, los puntos críticos son 0 y 2. El signo de $x(2-x)$ muestra que la función decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. Por tanto, tiene mínimo relativo $(0, 0)$ y máximo relativo $(2, 4e^{-2})$. Para las asíntotas: no hay verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, así que $y = 0$ es horizontal en ese extremo. Cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ y $f(x)/x = xe^{-x} \rightarrow -\infty$, de modo que no existe asíntota horizontal ni oblicua a la izquierda.

Opción B · Ejercicio 2

La continuidad en $x = -1$ requiere

$$-\alpha = 1 - \frac{\beta}{2}.$$

La igualdad de derivadas laterales exige $-\alpha = -2$, de donde $\alpha = 2$. Sustituyendo en la continuidad resulta $\beta = 6$. Entonces, en el tramo $[-2, -1]$, $f(x) = 2/x$ y

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = 2[\ln |x|]_{-2}^{-1} = \boxed{-2 \ln 2}.$$

Opción B · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ y $\det A = -\lambda(\lambda+2)$. Si $\lambda \neq 0, -2$, hay solución única.

Para $\lambda = 0$, la segunda ecuación da $x + y + z = 0$, mientras que la primera exige $y + z = 2$ y la tercera $x = 0$; estas condiciones son incompatibles con la segunda, por lo que no hay solución. Para $\lambda = -2$, el sistema queda

$$2x + y - z = 0, \quad x + y + z = 0, \quad 3x + 2y = 0.$$

Las dos primeras implican $x = 2z$ e $y = -3z$, y la tercera queda satisfecha. Por tanto, hay infinitas soluciones:

$$\boxed{(x, y, z) = (2t, -3t, t), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Opción B · Ejercicio 4

El simétrico de un punto respecto de una recta está a una distancia del punto original igual al doble de la distancia de este a la recta. La recta es intersección de los planos; sus normales $(3, -1, -1)$ y $(1, 1, -1)$ producen el director $d = (1, 1, 2)$. Un punto de la recta es $R = (-1, -5, 0)$. Para $P = (1, -3, 7)$,

$$\overrightarrow{RP} = (-4, 8, 7), \quad \overrightarrow{RP} \times d = (9, 15, -12), \quad |d| = \sqrt{6}.$$

Así, $d(P, r) = \frac{\sqrt{9^2+15^2+(-12)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{15}$. La distancia de P a su simétrico es el doble:

$$\boxed{10\sqrt{15}}.$$