

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea x la mitad de la base del rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, si h es su altura y el radio del semicírculo es $\sqrt{5}$ cm,

$$x^2 + h^2 = 5, \quad h = \sqrt{5 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{5}.$$

El rectángulo tiene base $2x$ y altura h , así que su perímetro es

$$P(x) = 2(2x + h) = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}.$$

Derivamos para buscar el máximo:

$$P'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0 \implies x = 2.$$

La segunda derivada es $P''(x) = -10/(5 - x^2)^{3/2} < 0$, por lo que el perímetro tiene allí un máximo. La altura correspondiente es $h = \sqrt{5 - 4} = 1$ cm y la base $2x = 4$ cm. Las dimensiones son

4 cm de base y 1 cm de altura.

Opción A - Ejercicio 2

Usamos el cambio $t = \sqrt{x}$, con $x = t^2$ y $dx = 2t dt$. Descomponemos primero la fracción:

$$\frac{x+1}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{t^2+1}{t+1} 2t dt = \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{t+1}\right) dt.$$

Integramos y volvemos a la variable x :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln(t+1) + C \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

Para que añadir la tercera ecuación no cambie el conjunto de soluciones, su lado izquierdo y su término independiente deben ser la misma combinación lineal de los de las dos ecuaciones dadas. En este caso,

$$3(x - y + z) - (2x + 3y - z) = x - 6y + 4z,$$

y el término independiente correspondiente es $3 \cdot 0 - 3 = -3$. Por tanto, $m = -6$.

En el apartado b), la suma de las incógnitas es 6. De la primera ecuación,

$$x - y + z = 0 \implies x = y - z.$$

Así, $x + y + z = 2y = 6$, luego $y = 3$. La primera ecuación da $x + z = 3$, y la segunda, $2x - z = -6$. De $x = 3 - z$ y la segunda relación se obtiene $2(3 - z) - z = -6$, por lo que $z = 4$ y $x = -1$. La solución es

$$(x, y, z) = (-1, 3, 4).$$

Opción A - Ejercicio 4

Calculamos dos vectores del paralelogramo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1, -2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (4, 2, -6).$$

Un vector normal al plano que contiene el paralelogramo es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (10, 10, 10) \sim (1, 1, 1).$$

Como el plano pasa por $A(-1, 0, 3)$, su ecuación general es

$$x + y + z - 2 = 0.$$

La diagonal AC pasa por A y tiene vector director $\overrightarrow{AC} = (4, 2, -6)$. En forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = 2t, \\ z = 3 - 6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En un paralelogramo, $A + C = B + D$, así que

$$D = A + C - B = (-1, 0, 3) + (3, 2, -3) - (2, -1, 1) = (0, 3, -1).$$

Opción B - Ejercicio 1

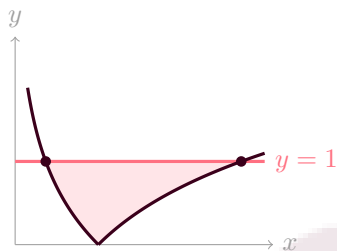
La normal dada es $y + x = -3$, es decir, tiene pendiente -1 . En $x = 0$, el punto de la gráfica es $(0, c)$, así que $c = -3$. Si la pendiente de la tangente es $f'(0) = b$, la pendiente de la normal es $-1/b$; por tanto, $-1/b = -1$ y $b = 1$. Finalmente, el punto de inflexión tiene abscisa 1, así que $f''(1) = 0$:

$$f''(x) = 6x + 2a, \quad 6 + 2a = 0 \implies a = -3.$$

Los coeficientes son $a = -3, b = 1, c = -3$.

Opción B - Ejercicio 2

Los puntos de corte con $y = 1$ verifican $|\ln x| = 1$, de donde $\ln x = 1$ o $\ln x = -1$. Por tanto, son $(e, 1)$ y $(e^{-1}, 1)$. Entre esos puntos, la recta está por encima de $g(x) = |\ln x|$; el recinto se extiende a ambos lados de $x = 1$:



El área se calcula integrando la diferencia entre la recta y la curva. Como $|\ln x| = -\ln x$ para $0 < x < 1$ y $|\ln x| = \ln x$ para $x > 1$, dividimos en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{1/e}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx \\ &= [x \ln x]_{1/e}^1 + [2x - x \ln x]_1^e \\ &= \frac{1}{e} + (e - 2) = \boxed{e + \frac{1}{e} - 2}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Restamos las ecuaciones matriciales para despejar X :

$$(2X - Y) - (X - Y) = B - A^t \implies X = B - A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De $X - Y = A^t$ se obtiene $Y = X - A^t$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $AZ = BZ + A$ se reordena como $(A - B)Z = A$. Como

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - B) = 1, \quad (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

podemos multiplicar por esta inversa por la izquierda:

$$Z = (A - B)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Los puntos que dividen AB en tres partes iguales se obtienen avanzando un tercio y dos tercios del vector

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1 - 1, 0 - 2, 4 - 3) = (-2, -2, 1).$$

Así,

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right), \quad P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

Un plano perpendicular al segmento AB tiene como vector normal $\overrightarrow{AB}$. Al pasar por $A(1, 2, 3)$, su ecuación general es

$$-2(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = 0 \implies 2x + 2y - z - 3 = 0.$$