

Opción A · Ejercicio 1

Para que el límite sea finito, los términos de orden $1/(x-1)$ deben cancelarse. Unificando:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} = \frac{x \ln x - a(x-1)}{(x-1) \ln x}.$$

El numerador debe anularse también en primer orden; derivar en $x = 1$ da $1 - a = 0$, luego $a = 1$. Con ese valor, numerador y denominador se anulan hasta primer orden, y aplicando L'Hôpital dos veces se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \frac{1}{2}.$$

Así, $a = 1$ y el límite vale $1/2$.

Opción A · Ejercicio 2

Integramos la derivada por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1, & x < 0, \\ e^x - x + C_2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Como f es derivable, es continua en 0, por lo que $C_1 = 1 + C_2$. Usando $f(1) = -1$, resulta $C_2 = -e$ y, por tanto, $C_1 = 1 - e$. La función pedida es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e, & x < 0, \\ e^x - x - e, & x \geq 0. \end{cases}$$

Opción A · Ejercicio 3

a) Para una matriz de orden 3, $\det(kA) = k^3 \det A$. Además, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. Así,

$$\det(-2A) = 24, \quad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{3}.$$

b) En el primer determinante, las filas son $R_2, 7R_1, 2R_3$. El intercambio de las dos primeras filas cambia el signo, y los factores 7 y 2 multiplican el determinante:

$$(-1) \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-3) = 42.$$

En el segundo, la matriz es A^T con la segunda columna reemplazada por $C_2 + 2C_3$ y la tercera por $5C_3$. Sumar un múltiplo de otra columna no altera el determinante; escalar la tercera por 5 lo multiplica por 5. Por tanto,

$$5 \det(A^T) = 5(-3) = -15.$$

Opción A · Ejercicio 4

a) La condición de ortogonalidad es $u \cdot w = \lambda - 1 = 0$, luego $\lambda = 1$.

b) Los tres vectores son linealmente independientes cuando el determinante formado por ellos es distinto de cero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda + 4.$$

Así, son independientes si y solo si $\lambda \neq -4$.

c) Para $\lambda = 1$, $w = (1, 1, 0)$. Se comprueba que $u + v + w = (3, 0, 2)$, por lo que

$$\boxed{r = u + v + w}.$$

Opción B · Ejercicio 1

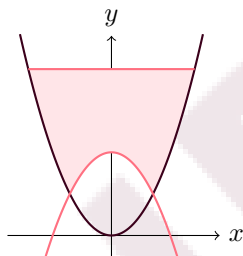
La continuidad en 0 da $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1$. Para que sea derivable, la derivada de la rama izquierda en 0 debe coincidir con la pendiente de la rama derecha a . Como $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, la derivada lateral izquierda vale 0; así, $a = 0$. En $x = -1$, $f(-1) = \sinh 1$ y

$$f'(-1) = \left. \frac{x \cosh x - \sinh x}{x^2} \right|_{x=-1} = \sinh 1 - \cosh 1 = -e^{-1}.$$

La tangente es $\boxed{y - \sinh 1 = -e^{-1}(x + 1)}$.

Opción B · Ejercicio 2

Las curvas se cortan entre sí en $x = \pm 1$, con $y = 1$, y la parábola $y = x^2$ corta a $y = 4$ en $x = \pm 2$. La región queda limitada arriba por $y = 4$ y abajo por x^2 en $[-2, -1] \cup [1, 2]$, y por $2 - x^2$ en $[-1, 1]$:



Por simetría, el área es

$$A = 2 \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_{-1}^1 (4 - (2 - x^2)) dx = \frac{10}{3} + \frac{14}{3} = \boxed{8}.$$

Opción B · Ejercicio 3

Como $\det A = -1$, la matriz A es invertible. De $A^T X + B = I$ despejamos $X = (A^T)^{-1}(I - B)$. Calculando por separado,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad I - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{X = (A^T)^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Opción B · Ejercicio 4

Parametrizamos $r = (-2, -1, 1) + t(2, 1, -3)$. La recta s tiene normales $(1, -1, 0)$ y $(0, 3, -1)$, luego su dirección es $(1, 1, 3)$. No son proporcionales. Al sustituir un punto de r en las ecuaciones de s , la primera fuerza $t = 4$ y la segunda $t = -1/3$; no hay punto común, así que son alabeadas. El plano que contiene a r y es paralelo a s tiene normal $(2, 1, -3) \times (1, 1, 3) = (6, -9, 1)$. Usando $(-2, -1, 1)$:

$$\boxed{6x - 9y + z + 2 = 0}.$$