

Junio de 2002 · Convocatoria ordinaria

En cada ejercicio se eligen tres problemas de cuatro. Aquí están resueltos los ocho para que puedas estudiar cualquiera de las opciones.

Ejercicio A · Problema 1

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Calcular los determinantes de A y B

Desarrollamos por la primera fila. Para una matriz 3×3 , cada elemento de esa fila se multiplica por el determinante de su menor, alternando los signos $+$, $-$, $+$.

$$\begin{aligned} \det A &= x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= x(5 + 5) - y(5 + 3) + z(5 - 3) \\ &= 10x - 8y + 2z = 2(5x - 4y + z). \end{aligned}$$

Para B , hacemos el mismo desarrollo:

$$\begin{aligned} \det B &= 2 \begin{vmatrix} y & -1 \\ z & -1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y \\ 2 & z \end{vmatrix} \\ &= 2(-y + z) - x(-1 + 2) + (z - 2y) \\ &= -x - 4y + 3z. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\det A = 2(5x - 4y + z)}, \quad \boxed{\det B = -x - 4y + 3z}.$$

ii) Determinante de AB cuando $x = y = z = 1$

Primero sustituimos $x = y = z = 1$ en los determinantes:

$$\det A = 2(5 - 4 + 1) = 4, \quad \det B = -1 - 4 + 3 = -2.$$

La propiedad que usaremos es $\det(AB) = \det A \det B$. Así,

$$\det(AB) = 4 \cdot (-2) = \boxed{-8}.$$

iii) Valores para los que ninguna de las matrices tiene inversa

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante no es cero. Por tanto, para que ninguna de las dos tenga inversa, imponemos simultáneamente $\det A = 0$ y $\det B = 0$. Al dividir la primera ecuación entre 2, queda el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 5x - 4y + z = 0, \\ -x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Escribimos su matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A_s = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, A_s^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El menor formado por las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5(-4) - (-4)(-1) = -24 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_s) = 2$. La matriz ampliada tiene el mismo menor no nulo y solo dos filas, de modo que $\text{rg}(A_s^*) = 2$. Por Rouché-Frobenius, como los rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas **3**, el sistema es compatible indeterminado y queda un parámetro libre. De la primera ecuación despejamos z :

$$z = -5x + 4y.$$

Sustituimos esta expresión en la segunda:

$$-x - 4y + 3(-5x + 4y) = 0 \implies -16x + 8y = 0 \implies y = 2x.$$

Entonces $z = -5x + 4(2x) = 3x$. Si llamamos $t = x$, todas las ternas solución son

$$(x, y, z) = (t, 2t, 3t), t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio A · Problema 2

El enunciado da los puntos $A = (1, -2, 3)$ y $B = (0, 2, 1)$, ambos de $\mathbb{R}^3$. Usaremos sus tres coordenadas en todos los apartados.

a) Recta que pasa por A y B

El vector director se obtiene restando las coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, 2 - (-2), 1 - 3) = (-1, 4, -2).$$

Usamos la forma paramétrica $(x, y, z) = A + t\overrightarrow{AB}$:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2t, \end{cases}$$

b) Plano cuyos puntos equidistan de A y B

Un punto genérico $X = (x, y, z)$ está a igual distancia de A y B si sus distancias al cuadrado son iguales. Escribimos esa condición:

$$\begin{aligned} XA^2 = XB^2 &\iff (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ &\iff -2x + 8y - 4z + 9 = 0 \\ &\iff \boxed{\pi : -2x + 8y - 4z + 9 = 0}. \end{aligned}$$

La mediatriz de un segmento en el espacio es un plano; la ecuación obtenida está en forma general.

c) Distancia del origen a la recta $\pi \cap \{2y - z = 0\}$

En la intersección se cumplen ambas ecuaciones. De $2y - z = 0$ resulta $z = 2y$; sustituyendo en π , $-2x + 8y - 8y + 9 = 0$, de donde $x = 9/2$. Tomando $y = t$, la recta queda en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = \frac{9}{2}, \\ y = t, \\ z = 2t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Para una recta que pasa por Q y tiene vector director $\vec{v}$, la distancia desde O es

$d(O, s) = \frac{\|\vec{OQ} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$. Aquí $Q = (9/2, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, por lo que

$$\vec{OQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -9, 9/2), \quad \|\vec{OQ} \times \vec{v}\| = \frac{9\sqrt{5}}{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5}.$$

Sustituimos en la fórmula:

$$d(O, s) = \frac{9\sqrt{5}/2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Ejercicio A - Problema 3

Llamamos X a las horas de estudio e Y a la nota de Matemáticas. Los datos del enunciado son:

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Horas x_i	17	17,5	13	17	17,5	15	4	101
Nota y_i	8	9	6	7	8	6	2	46
x_i^2	289	306,25	169	289	306,25	225	16	1600,5
y_i^2	64	81	36	49	64	36	4	334
$x_i y_i$	136	157,5	78	119	140	90	8	728,5

Así se obtienen las sumas que usaremos: $\sum x_i = 101$, $\sum y_i = 46$, $\sum x_i^2 = 1600,5$, $\sum y_i^2 = 334$ y $\sum x_i y_i = 728,5$.

Las medias de las dos variables son

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{7} = \frac{101}{7}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{7} = \frac{46}{7}.$$

a) Coeficiente de correlación

Usamos las sumas centradas $S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$, $S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$ y $S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$, con $n = 7$:

$$S_{xx} = 1600,5 - \frac{101^2}{7} = \frac{2005}{14},$$

$$S_{yy} = 334 - \frac{46^2}{7} = \frac{222}{7},$$

$$S_{xy} = 728,5 - \frac{101 \cdot 46}{7} = \frac{907}{14}.$$

La fórmula del coeficiente de correlación de Pearson es $r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$. Sustituimos:

$$r = \frac{\frac{907}{14}}{\sqrt{\frac{2005}{14} \cdot \frac{222}{7}}} = \frac{907}{2\sqrt{222555}} \approx \boxed{0,9613}.$$

b) Qué significa el coeficiente

El número es positivo y está cerca de 1. En este grupo se observa una relación lineal positiva muy fuerte: quienes estudian más horas tienden a sacar notas más altas. La correlación describe estos datos; por sí sola no demuestra que estudiar más sea la única causa de una nota mayor.

c) Estimar la nota al estudiar 20 horas

La recta de regresión de la nota Y respecto a las horas X tiene pendiente $m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ y pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$. Primero calculamos la pendiente:

$$m = \frac{\frac{907}{14}}{\frac{2005}{14}} = \frac{907}{2005}.$$

La recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$, así que su ordenada en el origen es

$$a = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{46}{7} - \frac{907}{2005} \cdot \frac{101}{7} = \frac{89}{2005}.$$

Por tanto, la recta de regresión de Y sobre X es

$$\hat{y} = a + mx = \frac{89}{2005} + \frac{907}{2005}x = \frac{89 + 907x}{2005}.$$

Para $x = 20$ horas:

$$\hat{y}(20) = \frac{89 + 907 \cdot 20}{2005} = \frac{18229}{2005} \approx \boxed{9,09}.$$

La mayor cantidad observada en la tabla es 17,5 horas. Como 20 queda fuera del intervalo observado, esta predicción es una extrapolación y debe tomarse como aproximada.

Ejercicio A · Problema 4

a) Valor positivo de a

El enunciado da el límite superior $a^2 - 1$ y pide que la integral valga $\frac{9}{2}$. Una primitiva de $x + 1$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$; por el teorema fundamental del cálculo, evaluamos esa primitiva en los límites:

$$\begin{aligned}\int_0^{a^2-1} (x+1) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{a^2-1} \\ &= \frac{(a^2-1)^2}{2} + (a^2-1) - 0 \\ &= \frac{a^4 - 2a^2 + 1 + 2a^2 - 2}{2} \\ &= \frac{a^4 - 1}{2}.\end{aligned}$$

Igualamos al valor del enunciado y despejamos:

$$\frac{a^4 - 1}{2} = \frac{9}{2} \implies a^4 - 1 = 9 \implies a^4 = 10.$$

Como se pide el valor positivo, tomamos la raíz cuarta positiva:

$$\boxed{a = \sqrt[4]{10}}.$$

b) Integral que da el área entre la curva y el eje OX

En $[0, 2]$, $x + 1 \geq 1 > 0$; por tanto, la curva está por encima del eje y el área es la integral de la función. Desarrollamos y evaluamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0 \right) = 2 + 2 = \boxed{4}.\end{aligned}$$

Ejercicio B · Problema 1

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinante e invertibilidad

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned}\det M(\lambda) &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ &= 4(-1 - 2\lambda) - 3(-2 - 2\lambda) + \lambda(2\lambda - \lambda) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1.\end{aligned}$$

Como $(\lambda - 1)^2 \geq 0$, se cumple $(\lambda - 1)^2 + 1 > 0$ para todo real λ . El determinante nunca es cero; por la condición de invertibilidad, $M(\lambda)$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Calcular $M(0)^{-1}$

Sustituimos $\lambda = 0$:

$$M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det M(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Usamos $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{Adj}(M)$. Los cofactores de $M(0)$, calculados como determinantes de menores con signos alternos, forman

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \text{Adj}(M(0)) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dividimos la adjunta entre el determinante:

$$M(0)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

iii) Determinante de $AB^{-1}C^{-1}$

La propiedad del determinante de un producto y de la inversa da

$$\det(AB^{-1}C^{-1}) = \det A \frac{1}{\det B} \frac{1}{\det C}.$$

Aquí $A = M(8)$, $B = M(4)$ y $C = M(3)$. Sustituimos cada parámetro en $\det M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$:

$$\det M(8) = 64 - 16 + 2 = 50, \det M(4) = 16 - 8 + 2 = 10, \det M(3) = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Por tanto,

$$\det(AB^{-1}C^{-1}) = \frac{50}{10 \cdot 5} = \boxed{1}.$$

Ejercicio B · Problema 2

Los planos que definen r y el punto son

$$\pi_1 : 2x + y - z + 5 = 0, \pi_2 : 4x + 4y - z + 9 = 0, P = (3, -1, 4).$$

a) Distancia del punto P a la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$

Comprobamos que P no pertenece a la recta: al sustituirlo en π_1 ,

$2(3) + (-1) - 4 + 5 = 6 \neq 0$. Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (4, 4, -1)$. La dirección de su recta de intersección es el producto vectorial:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (3, -2, 4).$$

Buscamos un punto de la recta. Si tomamos $Q = (-2, 0, 1)$, comprobamos que satisface ambos planos:

$$2(-2) + 0 - 1 + 5 = 0, \quad 4(-2) + 4(0) - 1 + 9 = 0.$$

Así, la recta en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -2t, \\ z = 1 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para la distancia punto-recta usamos $d(P, r) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$. Primero:

$$\vec{QP} = P - Q = (5, -1, 3), \quad \vec{QP} \times \vec{d} = (2, -11, -7), \quad \|\vec{QP} \times \vec{d}\| = \sqrt{174}, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{29}.$$

Sustituimos en la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \boxed{\sqrt{6}} \approx 2,45.$$

b) Plano que pasa por r y por P

Además del vector director $\vec{d} = (3, -2, 4)$, el plano contiene el vector $\vec{QP} = (5, -1, 3)$. Un vector normal al plano es su producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{QP} = (-2, 11, 7).$$

Usamos la ecuación general del plano que pasa por $Q = (-2, 0, 1)$:

$$2(x + 2) - 11y - 7(z - 1) = 0 \implies \boxed{2x - 11y - 7z + 11 = 0}.$$

Ejercicio B · Problema 3

El enunciado restringe el dominio a $x \geq 0$, es decir, $D = [0, +\infty)$. En ese dominio $1 + x^2 \geq 1 > 0$, así que los denominadores no se anulan; además, ambos argumentos de **arcsin** y **arccos** pertenecen a $[-1, 1]$. Las funciones son

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Las raíces están definidas y $1 + x^2 > 0$ para todo real; el enunciado restringe el estudio a $x \geq 0$. Aplicamos la regla de la cadena: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ y $(\arccos v)' = -\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$.

Para f , ponemos $u = x(1+x^2)^{-1/2}$:

$$u' = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Sustituimos en la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}.$$

Para g , ponemos $v = (1+x^2)^{-1/2}$. Si $x > 0$,

$$v' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad \sqrt{1-v^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Entonces

$$g'(x) = -\frac{-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}} \quad (x > 0).$$

Para comparar las funciones, sea $\theta = \arctan x$. Como $x \geq 0$, se tiene $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, y el triángulo con catetos x y 1 da

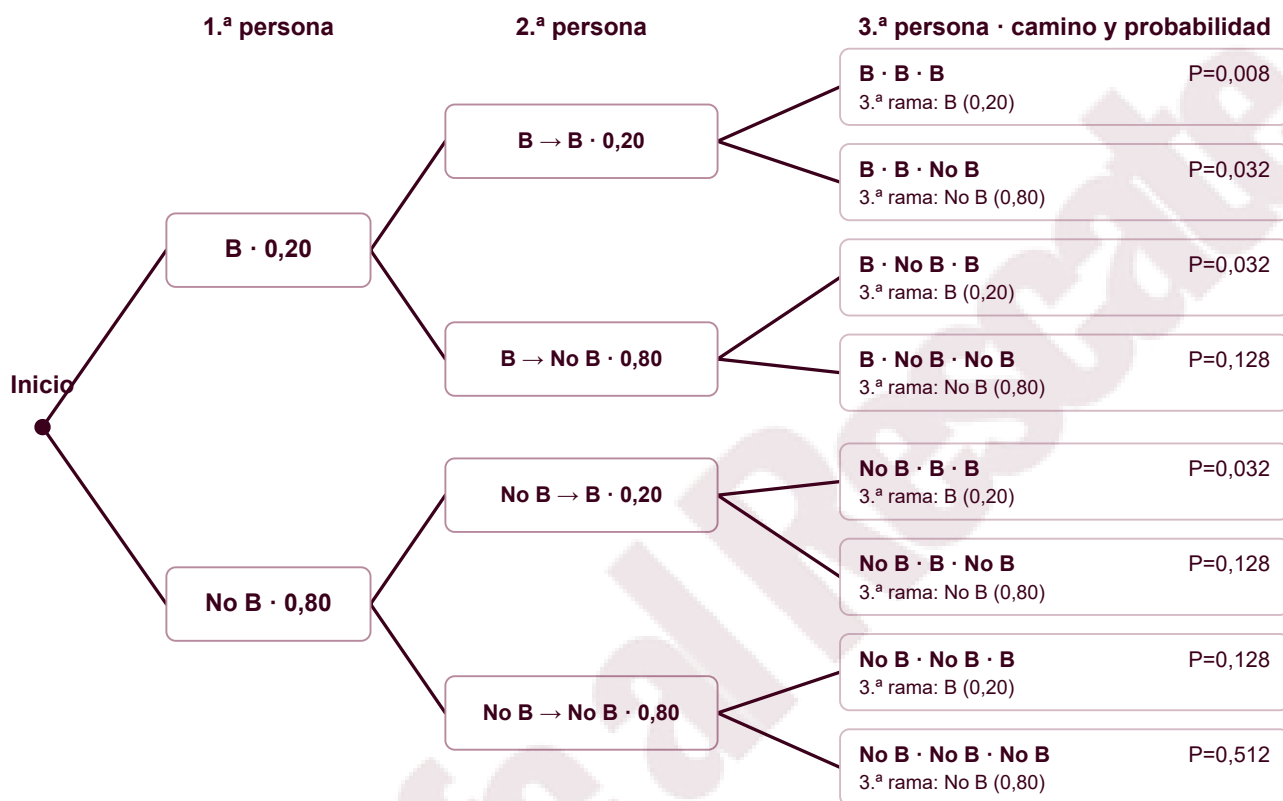
$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Por las definiciones de las funciones inversas, $f(x) = \theta$ y $g(x) = \theta$. Así, ambas son iguales a **arctan x**; sus derivadas coinciden para $x > 0$, y en el extremo $x = 0$ sus derivadas por la derecha valen 1 .

$$\boxed{f(x) = g(x) = \arctan x \text{ y } f(x) - g(x) = 0 \text{ } (x \geq 0).}$$

Ejercicio B · Problema 4

Se eligen tres personas de una ciudad grande. El enunciado dice que el 20 % vota al partido B; por tanto, en cada elección usamos $P(B) = 0,20$ y $P(\text{No } B) = 0,80$. Como la población es grande, estas probabilidades se mantienen de una persona a la siguiente. El árbol muestra las tres elecciones: para hallar la probabilidad de un camino multiplicamos sus tres ramas y, si el suceso admite varios caminos, sumamos sus probabilidades. Aquí, B significa «vota a B», No B significa «no vota a B» y, en las operaciones, escribimos N como abreviatura de No B.



a) Probabilidad de que los tres voten a B

El único camino favorable es BBB . Multiplicamos las probabilidades de sus tres ramas:

$$P(BBB) = 0,20 \cdot 0,20 \cdot 0,20 = \boxed{0,008}.$$

b) Probabilidad de que ninguno vote a B

El camino correspondiente es NNN :

$$P(NNN) = 0,80 \cdot 0,80 \cdot 0,80 = \boxed{0,512}.$$

c) Probabilidad de que solamente uno vote a B

En el árbol hay tres caminos con exactamente una B : BNN , NBN y NNB . Cada uno tiene la misma probabilidad, porque cada camino contiene una rama B y dos ramas N :

$$P(BNN) = P(NBN) = P(NNB) = 0,20 \cdot 0,80 \cdot 0,80 = 0,128.$$

Sumamos las probabilidades de esos tres caminos incompatibles:

$$P(\text{exactamente una persona vota a B}) = 0,128 + 0,128 + 0,128 = \boxed{0,384}.$$