

CATALUÑA · PAU 2019 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la superficie impresa más grande posible.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Queremos construir un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Sabemos que el precio de la madera es de $7,5 \text{ €/m}$ para los lados horizontales y de $12,5 \text{ €/m}$ para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) 1 punto

Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso $k = -1$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Sean la recta $r : \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - z = 3$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en que lo corta la recta r .

b) 1 punto

Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π .

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más cercano del plano de ecuación $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia debe recorrer hasta llegar al plano?

b) 1 punto

Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) 1 punto

Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Considere la función $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.

a) 1 punto

Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?

b) 1 punto

Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) 1 punto

Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

b) 1 punto

Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) 1 punto

Calcule para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, en la que I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2.

b) 1 punto

Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso $a = \sqrt{2}$.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Considere los planos $\pi_1 : 2x + ay + z = 5$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en los que a es un parámetro real.

a) 1 punto

Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.

b) 1 punto

Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la imagen.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) 1 punto

Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de las abscisas. Calcule las coordenadas del punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

b) 1 punto

Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sabemos que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

a) 1 punto

Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

b) 1 punto

Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .