

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m :

$$-x + y + z = m$$

$$2x + my - z = 3m$$

$$(m-1)x + 3y - z = 6 + m$$

Se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m . (6 puntos)
- Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2+C_1, C_3+C_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \\ m-1 & m+2 & m-2 \end{vmatrix} = \{\text{desarrollando por la 1ª fila}\} = -1 \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ m+2 & m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -((m+2)(m-2) - (m+2)) = -[(m+2)(m-2-1)] = -[(m+2)(m-3)]$$

$$-[(m+2)(m-3)] = 0; \quad \begin{cases} m+2=0 \rightarrow m=-2 \\ m-3=0 \rightarrow m=3 \end{cases}$$

Para $m \neq -2$ y $m \neq 3$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $m = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Calculemos el rango de A

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,

$$\text{En } A, \quad \left. \begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculemos el rango de A'

Al menor anterior no nulo de A le añadimos la cuarta columna y tercera fila,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 18 + 6 + 6 - 8 = 30 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Para $m = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

En esta matriz F_2 y F_3 son iguales, podemos eliminar una de ellas (ambas ecuaciones son la misma).
Queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

A es una matriz 2×3 , por tanto el máximo rango de A es 2.

A' es una matriz 2×4 , por tanto el máximo rango de A' es 2.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\text{En } A, \left. \begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' es 2 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto,

Para $m \neq -2$ y $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado

Para $m = -2$ el sistema es incompatible y

Para $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado

b) Solución para $m = 3$.

Del estudio realizado en el apartado anterior para $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado y las ecuaciones e incógnitas principales (las del menor de orden 2 no nulo) son 1° y 2° y x e y .

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 9 + z \end{cases}$$

$$|A| = -5$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 9+z & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9-3z-9-z}{-5} = \frac{-4z}{-5} = \frac{4z}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-z \\ 2 & 9+z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9-z-6+2z}{-5} = \frac{-15+z}{-5} = \frac{15-z}{5}$$

$$\text{Si } m = 3, \text{ la solución es: } \begin{cases} x = \frac{4\lambda}{5} \\ y = \frac{15-\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real m . (3 puntos)
- Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)
- Para $m = 0$, calcular A^5 . (3 puntos)

Solución:

a) Rango de A en función de m .

A es 3×3 por tanto el máximo rango de A es 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = \{\text{desarrollando por la 2ª fila}\} = m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m(m - m^2)$$

$$m(m - m^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - m^2 = 0 \rightarrow m(1 - m) = 0 \end{cases} \begin{cases} m = 0 \\ 1 - m = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, $\text{ran}(A) = 3$.

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Sabemos que } |A| = 0$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Si $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Sabemos que } |A| = 0$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Solución:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, $\text{ran}(A) = 3$.

Si $m = 0$ o $m = 1$, $\text{ran}(A) = 2$.

b) Para $m = -1$, resolver $AX = B$

Para $m = -1$ ($m \neq 0$ y $m \neq 1$) $\rightarrow \text{ran}(A) = 3$, por lo tanto existe la matriz inversa de A .

Obtendremos X de la siguiente forma: $AX = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1} , $A^{-1}AX = A^{-1}B$, $X = A^{-1}B$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = m(m - m^2) \Big|_{m=-1} = -1(-1 - 1) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Para $m = 0$, calcular A^5 .

$$\text{Para } m = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$.

Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r . (4 puntos)
- Para los valores de m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π que contenga a la recta r . (3 puntos)
- Calcular en función de m , la distancia entre π y el punto $P(1, -1, -2)$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿ $m?$ / $r // \pi$.

$r // \pi$ si $\vec{v}_r$ (vector director de r) y $\vec{n}_\pi$ (vector perpendicular a π) son perpendiculares.

$$\vec{v}_r(2, 3, -1) \text{ y } \vec{n}_\pi(3, -m, 1). \quad \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0;$$

$$(2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 0; \quad 6 - 3m - 1 = 0; \quad 5 - 3m = 0; \quad 5 = 3m; \quad m = \frac{5}{3}$$

Para que r y π sean paralelos $m = \frac{5}{3}$.

¿ $m?$ / $r \subset \pi$.

Para que $r \subset \pi$ deben cumplirse dos condiciones: $P_r(1, -1, -2) \in \pi$ y que $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$.

Como hemos obtenido anteriormente, $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ si $m = \frac{5}{3}$.

$P_r(1, -1, -2) \in \pi$, sustituyendo las coordenadas de P_r en π : $3 \cdot 1 - m(-1) + (-2) = 1$;
 $3 + m - 2 = 1$; $m + 1 = 1$; $m = 0$.

Hemos obtenido dos valores de m distintos, por lo que la recta r no está contenida en el plano π .

No existe valor de m para el que el plano π contiene a la recta r .

b) Para $m = \frac{5}{3}$ ¿plano $\sigma?$ / $\sigma // \pi$ y $r \subset \sigma$.

$$\text{Para } m = \frac{5}{3} \rightarrow \pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \rightarrow \pi: 9x - 5y + 3z = 3$$

$$\text{Como } \sigma // \pi \rightarrow \sigma: 9x - 5y + 3z = D$$

$$\text{Para que } r \subset \sigma \rightarrow P_r(1, -1, -2) \in \sigma \rightarrow 9 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = D \rightarrow 9 + 5 - 6 = D \rightarrow D = 8$$

La ecuación del plano pedido es: $9x - 5y + 3z = 8$.

c) $P(1, -2, -2)$ y $\pi: 3x - my + z = 1$, ¿ $d(P, \pi)$?

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - m(-1) + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + m^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m - 2|}{\sqrt{m^2 + 10}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

$$\text{Solución: } d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$ y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

- Calcular la ecuación de la recta r . (2 puntos)
- Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)
- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Solución:

a) ¿recta r ?

Como la recta r es la que contiene los otros dos vértices del cuadrado será paralela a la que pasa por P y

Q . Por tanto de la recta r sabemos $\begin{cases} \text{punto } R(4,7,6) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2) \end{cases}$

La ecuación vectorial de r : $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

La ecuación continua de r : $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{-2}$

b) ¿Plano π ? / $\pi \subset$ cuadrado

π será el plano que contenga los puntos P , Q y R .

Por tanto del plano π sabemos $\begin{cases} \text{punto } P(2,1,3) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{PQ} (-1, 2, -2) \\ \overrightarrow{PR} (2, 6, 3) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π la obtenemos a partir de:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad (x-2) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

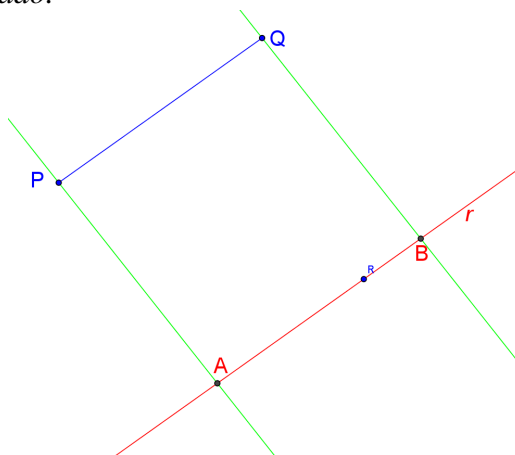
$$(x-2)(6+12) - (y-1)(-3+4) + (z-3)(-6-4) = 0; \quad 18(x-2) - (y-1) - 10(z-3) = 0$$

$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0; \quad 18x - y + 10z - 5 = 0$$

Solución: la ecuación del plano pedido es $18x - y + 10z - 5 = 0$.

c) Coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

El problema a resolver expresado de forma gráfica (en el plano en lugar del espacio) es:



Cálculo del vértice A.

Calculamos el plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r (plano σ). El vértice A será el punto de corte entre el plano σ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\sigma$ el vector perpendicular al plano σ .

$$\text{Como } \sigma \perp r \rightarrow \vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (-1, 2, -2)$$

La ecuación del plano σ será: $-x + 2y - 2z + D = 0$

$$\text{Como el punto } P(2, 1, 3) \in \sigma \rightarrow -2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + D = 0; \quad -6 + D = 0; \quad D = 6$$

$$\text{Luego } \sigma: -x + 2y - 2z + 6 = 0$$

Punto de corte entre σ y r.

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$$-(4 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) + 6 = 0; \quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda + 6 = 0; \quad 4 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{-4}{9} \rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{-4}{9} = \frac{40}{9} \\ y = 7 + 2\left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{55}{9} \\ z = 6 - 2\left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{62}{9} \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Cálculo del vértice B.

Calculamos el plano que contiene al punto Q y es perpendicular a la recta r (plano δ). El vértice B será el punto de corte entre el plano δ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\delta$ el vector perpendicular al plano δ .

$$\text{Como } \delta \perp r \rightarrow \vec{n}_\delta = \vec{v}_r = (-1, 2, -2)$$

La ecuación del plano δ será: $-x + 2y - 2z + D = 0$

$$\text{Como el punto } Q(1, 3, 1) \in \delta \rightarrow -1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + D = 0; \quad 3 + D = 0; \quad D = -3$$

$$\text{Luego } \delta: -x + 2y - 2z - 3 = 0$$

Punto de corte entre δ y r.

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$$-(4 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) - 3 = 0; \quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda - 3 = 0; \quad 9\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{9} \rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{5}{9} = \frac{31}{9} \\ y = 7 + 2\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{73}{9} \\ z = 6 - 2\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{44}{9} \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Solución: los otros dos vértices del cuadrado son $A\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ y $B\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$.

Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
- Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

Solución:

Como k es un parámetro real, si $k = 0$ $f(x) = 0$ y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:

- $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, $f(x)$ no tiene asíntotas.
- $f(x)$ es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
- $f(x)$ es nula para cualquier valor de x por tanto $f(x)$ se anula en cualquier punto del intervalo $[-1, 1]$.

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

$$a) f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$$

$$e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}.$$

Asíntotas.

Como $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx \} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$ en $+\infty$.

Asíntota oblicua: ($y = mx + n$)

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{kx}{e^{2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{2x}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \frac{k}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego $f(x)$ sólo tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

b) Monotonía y máximos y mínimos de $y = f(x)$

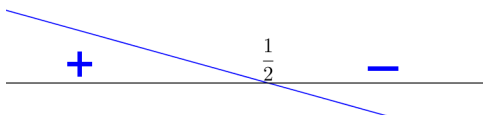
$$f'(x) = \frac{k e^{2x} - k x e^{2x} 2}{(e^{2x})^2} = \frac{k e^{2x} (1 - 2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} \text{ y } e^{4x} > 0 \rightarrow \text{el signo de } f'(x) \text{ depende de la expresión } k(1 - 2x)$$

$1 - 2x$ es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: $1 - 2x = 0$;

$$1 = 2x; \quad x = \frac{1}{2}. \text{ Gráficamente}$$



En consecuencia:

si $k > 0$ $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y tiene un máximo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$.

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{k \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$.

c) Justificar que $f(x)$ se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$

Como $\text{Dom } f(x) = \mathcal{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathcal{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $[-1, 1]$

$$f(-1) = \frac{k(-1)}{e^{2(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -k e^2$$

$$\rightarrow f(-1) \cdot f(1) = -k e^2 \frac{k}{e^2} = \{e^2 \neq 0\} = -k^2 < 0$$

$$f(1) = \frac{k \cdot 1}{e^{2 \cdot 1}} = \frac{k}{e^2}$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

$f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) \cdot f(1) < 0 \rightarrow \exists c \in (-1, 1) / f(c) = 0$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R . (10 puntos)

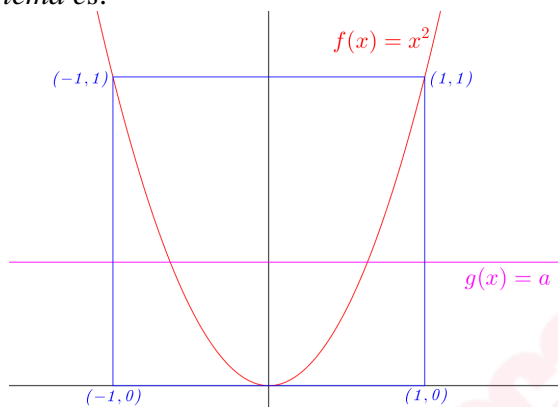
Solución:

La representación gráfica del problema es:

$f(x)$ es una parábola

$$f(x) = x^2$$

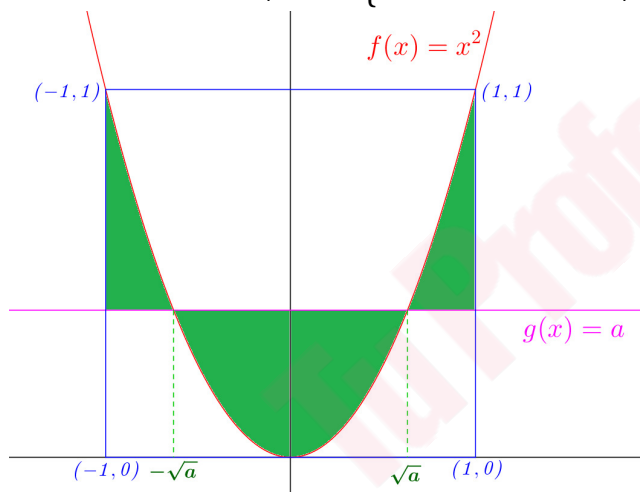
x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1



El área del rectángulo R es {la base mide 2 y la altura 1} $A_R = 2 \cdot 1 = 2$

Para calcular el área entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ necesitamos obtener sus puntos de corte:

$$x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \quad \left\{ \text{como } 0 < a < 1 \quad \exists \sqrt{a} \right\}$$



El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dentro de R son las zonas coloreadas del dibujo.

Como las dos funciones son simétricas respecto del eje OY , el cálculo de esta área lo obtenemos como sigue:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx \right] = \\ &= 2 \left[\left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} + \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{\sqrt{a}}^1 \right] = \\ &= 2 \left[\left(a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - (0 - 0) + \left(\frac{1^3}{3} - a \cdot 1 \right) - \left(\frac{(\sqrt{a})^3}{3} - a\sqrt{a} \right) \right] = 2 \left(\sqrt{a^3} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3} \right) = \\ &= 2 \left(2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a \right) = 2 \left(\frac{4\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a \right) = \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2a \end{aligned}$$

Debe cumplirse que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de $R \rightarrow$

$$A = \frac{1}{3} A_R \rightarrow \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2a = \frac{1}{3} \cdot 2; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2a = 0; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} = 2a;$$

$$\frac{8\sqrt{a^3}}{2} = 3a; \quad 4\sqrt{a^3} = 3a; \quad (4\sqrt{a^3})^2 = (3a)^2; \quad 16a^3 = 9a^2; \quad 16a^3 - 9a^2 = 0; \quad a^2(16a - 9) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 0; & a = 0 \\ 16a - 9 = 0; & 16a = 9; & a = \frac{9}{16} \end{cases} \quad \text{como } 0 < a < 1 \rightarrow a = \frac{9}{16}$$

Como en el proceso de resolución de la ecuación hemos elevado al cuadrado, comprobemos que la solución verifica la ecuación inicial:

$$4\sqrt{a^3} = 3a; \quad 4\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^3} = 3\frac{9}{16}; \quad \frac{27}{16} = \frac{27}{16} \quad a = \frac{9}{16} \text{ es solución.}$$

Solución: el valor de a buscado es $\frac{16}{9}$.

Tu Profe al Rescate

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0'6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

- Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
 - ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
 - ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)
- Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 . (4 puntos)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

CM_1 = obtener cara en la moneda M_1 .

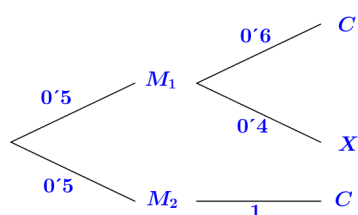
XM_1 = obtener cruz en la moneda M_1

CM_2 = obtener cara en la moneda M_2 .

XM_2 = obtener cruz en la moneda M_2

De los datos del problema, $P(CM_1)=0'6 \rightarrow P(XM_1)=1-0'6=0'4$; $P(CM_2)=1 \rightarrow P(XM_2)=0$.

Experiencia: sacamos al azar una moneda de la bolsa que contiene las dos monedas M_1 y M_2 (las dos monedas tienen la misma probabilidad de ser extraídas), la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. El árbol sería:



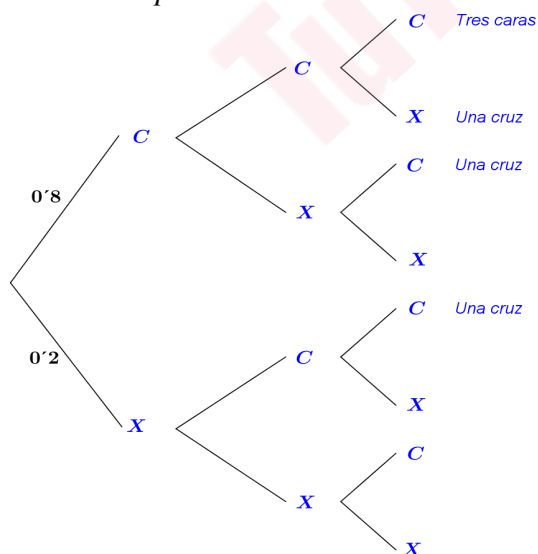
La probabilidad de obtener cara o cruz sería:

$$P(C) = 0'5 \cdot 0'6 + 0'5 \cdot 1 = 0'8$$

$$P(X) = 0'5 \cdot 0'4 = 0'2$$

- Repetimos la experiencia anterior tres veces.

El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

$$P(\text{obtener tres caras}) = 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'8 = 0'512$$

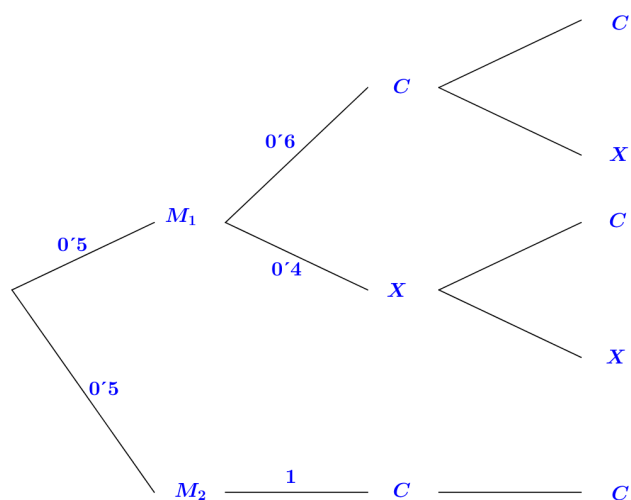
$$P(\text{obtener una cruz}) = 3 \cdot 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'2 = 0'384$$

Otra forma de resolverlo sería: consideramos Y = número de cruces en tres lanzamientos $\rightarrow Y = B(3, 0'2)$ y usando la tabla de la binomial correspondiente,

$$P(\text{obtener tres caras}) = P(Y = 0) = 0'512$$

$$P(\text{obtener una cruz}) = P(Y = 1) = P(Y \leq 1) - P(Y \leq 0) = 0'896 - 0'512 = 0'384.$$

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces.
El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

$$P\left(\frac{M_1}{2 \text{ caras}}\right) = \frac{P(M_1 \cap 2 \text{ caras})}{P(2 \text{ caras})} = \frac{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{0.18}{0.68} = \frac{9}{34} \cong 0.2647$$

$$P\left(\frac{M_2}{2 \text{ caras}}\right) = \frac{P(M_2 \cap 2 \text{ caras})}{P(2 \text{ caras})} = \frac{0.5 \cdot 1 \cdot 1}{0.68} = \frac{25}{34} \cong 0.7353$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)
- Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)
- Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

NV = no obtener venta.

V = obtener venta

Como “sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta” $\rightarrow P(NV) = 0.3 \rightarrow P(V) = 1 - 0.3 = 0.7$

El comercial realiza 10 llamadas, usando la variable X = número de ventas en 10 llamadas, X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.7$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \leq 0.5$). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de ventas en 10 llamadas $\rightarrow Y = B(10, 0.3)$ y la tabla nos da los resultados para Y .

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

- a) Probabilidad de que consiga más de 7 ventas.

“que consiga más de 7 ventas” $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$

$$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0.3828$$

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es 0.3828.

- b) Probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

“que consiga al menos 5 ventas” $\equiv X \geq 5 \equiv Y \leq 5$

$$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0.9527$$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es 0.9527.

- c) Probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

“que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas” $\equiv 3 \leq X \leq 8 \equiv 2 \leq Y \leq 7$

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1) = 0.9984 - 0.1493 = 0.8491$$

La probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas es 0.8491.