

Modelo 4 de 2001

Derivabilidad, límites, matrices, simetrías, optimización, extremos e intersecciones en el espacio.

Opción A - Ejercicio 1

Para que la gráfica de f tenga tangente en $(0, 1)$ debe pasar por ese punto y tener derivadas laterales iguales. Por continuidad, $b = 1$. La derivada por la izquierda de e^{-x} en 0 es -1 y la derivada por la derecha de $ax + b$ es a , de modo que

$$a = -1, \quad b = 1.$$

En el apartado (b), la continuidad en 0 obliga a $d = 1$. Sin embargo, la derivada por la izquierda de e^{-x} vale -1 , mientras que la de $cx^2 + d$ por la derecha vale 0, cualquiera que sea c . Por tanto, no existen constantes c, d que hagan derivable a g en 0; no tiene tangente única en el punto indicado. **Opción A - Ejercicio 2**

En (a), racionalizamos para eliminar la diferencia de raíces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

En (b), escribimos $x^2 e^{-3x} = x^2 / e^{3x}$. La exponencial crece más deprisa que cualquier polinomio; también se puede aplicar L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \boxed{0}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La ecuación $AX - 3B = 0$ equivale a $AX = 3B$. Como $\det A = -1 \neq 0$, multiplicamos por A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = 3A^{-1}B = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta tiene un punto $P = (5, 0, 2)$ y vector director $v = (2, 1, 3)$. El pie de la perpendicular desde $A = (0, -1, 1)$ sobre la recta es

$$H = P + \frac{(A - P) \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Aquí $A - P = (-5, -1, -1)$, $(A - P) \cdot v = -14$ y $v \cdot v = 14$, por lo que $H = P - v = (3, -1, -1)$. El punto simétrico A' cumple que H es el punto medio de AA' :

$$A' = 2H - A = (6, -2, -2) - (0, -1, 1) = \boxed{(6, -1, -3)}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Como f es un polinomio, su dominio es $\mathbb{R}$. El signo de la derivada determina los intervalos de crecimiento:

$$f'(x) = -6x^2 - 18x - 12 = -6(x + 1)(x + 2).$$

El signo de f' es negativo en $(-\infty, -2)$, positivo en $(-2, -1)$ y negativo en $(-1, \infty)$. Por tanto, f decrece en $(-\infty, -2)$ y $(-1, \infty)$, y crece en $(-2, -1)$. El cambio de signo da un mínimo relativo en $\alpha = -2$ y un máximo relativo en $\beta = -1$:

$$f(-2) = 4, \quad f(-1) = 5.$$

Una primitiva es $F(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 - 6x^2$, de modo que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(-1) - F(-2) = -\frac{7}{2} - (-8) = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Sea r el radio del semicírculo y h la altura de cada lado recto. El ancho de la puerta es $2r$. La condición de área fija es

$$2rh + \frac{\pi r^2}{2} = 2,$$

por lo que $h = 1/r - \pi r/4$ y, además, $0 < r < 2/\sqrt{\pi}$. El perímetro incluye la base, los dos lados y el arco semicircular:

$$P(r) = 2r + 2h + \pi r = \frac{2}{r} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r.$$

Derivamos para localizar el mínimo:

$$P'(r) = -\frac{2}{r^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0 \implies r = \frac{2}{\sqrt{\pi+4}}.$$

Como $P''(r) = 4/r^3 > 0$, se trata de un mínimo. Al sustituir en la relación del área, $h = 2/\sqrt{\pi+4}$; por tanto, las dimensiones son ancho $2r = \boxed{4/\sqrt{\pi+4} \text{ m}}$ y altura total $h + r = \boxed{4/\sqrt{\pi+4} \text{ m}}$. **Opción B - Ejercicio 3**

Por la propiedad $\det(kA) = k^3 \det A$ para matrices 3×3 , primero calculamos $\det A = -1$. También,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\det(2A) = -8, \quad \det(A^3) = (\det A)^3 = -1, \quad \det((A^3)^{-1}) = \frac{1}{\det(A^3)} = -1.$$

La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobarla, el producto AA^{-1} es la matriz identidad. **Opción B - Ejercicio 4**

Parametrizamos la recta mediante $P(t) = (t, 2t-2, 3-t)$. Un punto equidistante del origen y de $A = (1, 2, 1)$ cumple $\|P\|^2 = \|P - A\|^2$, equivalente a $2A \cdot P = \|A\|^2 = 6$. Al sustituir,

$$A \cdot P(t) = t + 2(2t-2) + (3-t) = 4t - 1 = 3,$$

por lo que $t = 1$. El punto pedido es $\boxed{(1, 0, 2)}$; en efecto, sus distancias a ambos puntos son $\sqrt{5}$.