

Modelo 3 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

El dominio es $(0, +\infty)$. Derivando,

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1).$$

Como $x > 0$, el único punto crítico cumple $2 \ln x + 1 = 0$, es decir, $x = e^{-1/2}$. La derivada es negativa antes y positiva después, por lo que hay un mínimo relativo:

$$f(e^{-1/2}) = e^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2e}.$$

En $x = \sqrt{e}$, se tiene $f(x) = e/2$ y $f'(x) = 2\sqrt{e}$. La tangente es

$$y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e}(x - \sqrt{e}), \quad \boxed{y = 2\sqrt{e}x - \frac{3e}{2}}.$$

Opción A · Ejercicio 2

El punto de corte se obtiene de $e^{x-1} = e^{1-x}$, de donde $x = 1$ y $y = 1$. En el intervalo $[0, 1]$, e^{1-x} queda por encima de e^{x-1} ; por ello,

$$A = \int_0^1 (e^{1-x} - e^{x-1}) dx = (e - 1) - (1 - e^{-1}) = \boxed{e + e^{-1} - 2}.$$

Opción A · Ejercicio 3

a) El determinante de A es $3\alpha - 2$. Por tanto, A tiene inversa si y solo si $\boxed{\alpha \neq \frac{2}{3}}$.

b) Para $\alpha = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. De $AX = B$ se sigue $X = A^{-1}B$, y la multiplicación da

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Opción A · Ejercicio 4

Las rectas son

$$r : (x, y, z) = (2, k, 0) + t(3, 4, 5), \quad s : (x, y, z) = (-2, 1, 3) + u(-1, 2, 3).$$

Para que se corten igualamos coordenadas. De las ecuaciones de x y z resulta $t = -\frac{9}{14}$ y $u = -\frac{29}{14}$; al usar la ecuación de y se obtiene $k = -\frac{4}{7}$. El punto de corte es $P = (\frac{1}{14}, -\frac{22}{7}, -\frac{45}{14})$. Un vector normal al plano que contiene ambas rectas es $(3, 4, 5) \times (-1, 2, 3) = (2, -7, 5)$. Usando P :

$$2x - 7y + 5z + D = 0, \quad D = -\frac{85}{14}.$$

Una ecuación general del plano es $\boxed{28x - 98y + 70z - 85 = 0}$.

Opción B · Ejercicio 1

Sean $x, y > 0$ los lados, medidos en centímetros. La condición sobre los perímetros es $4x + 4y = 100$, luego $y = 25 - x$ y $0 < x < 25$. El coste es

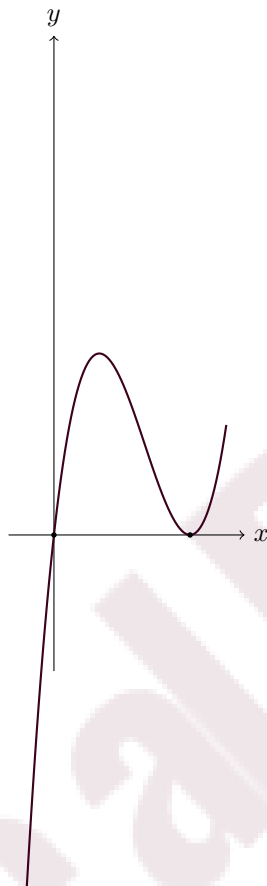
$$C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2, \quad C'(x) = 10x - 150.$$

El único punto crítico es $x = 15$; como $C''(x) = 10 > 0$, minimiza el coste. Entonces $y = 10$. Las chapas deben tener lados $\boxed{15 \text{ cm y } 10 \text{ cm}}$ (coste mínimo 750 euros).

Opción B · Ejercicio 2

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x, \quad f'(x) = 3(x-1)(x-3).$$

La derivada cambia de + a - en 1 y de - a + en 3: crece en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, decrece en $(1, 3)$, con máximo $(1, 4)$ y mínimo $(3, 0)$. La curva corta al eje en 0 y 3 y queda sobre él entre esos valores. El esbozo muestra el recinto cuya área calculamos:



Por tanto,

$$A = \int_0^3 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

Opción B · Ejercicio 3

Llevamos las ecuaciones a la forma matricial $AX = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Si $\lambda \neq 1, 2$, el determinante es no nulo y hay solución única. Para $\lambda = 2$, al restar la primera ecuación de la segunda se obtiene $x + y = 2$, mientras que la primera y tercera fuerzan $z = 1$ y $x + y = -1$; es incompatible. Para $\lambda = 1$, la tercera ecuación coincide con la primera, y la segunda con la primera da $x = 2$. Queda $y + z = -2$, luego es SCI:

$$\boxed{(x, y, z) = (2, t, -2 - t), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta dada tiene dirección $v = (2, 2, 1)$ y el plano tiene normal $n = (1, 2, 3)$. Para que la recta buscada esté en el plano y sea perpendicular a la dada, su vector director debe ser perpendicular a n y a v . Tomamos $n \times v = (-4, 5, -2)$. Como pasa por $(2, 1, -1)$, queda

$$\boxed{(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(-4, 5, -2), \quad t \in \mathbb{R}}.$$