

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2017 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Región factible y mínimo

Sean x e y las variables de las inecuaciones. La región viene dada por

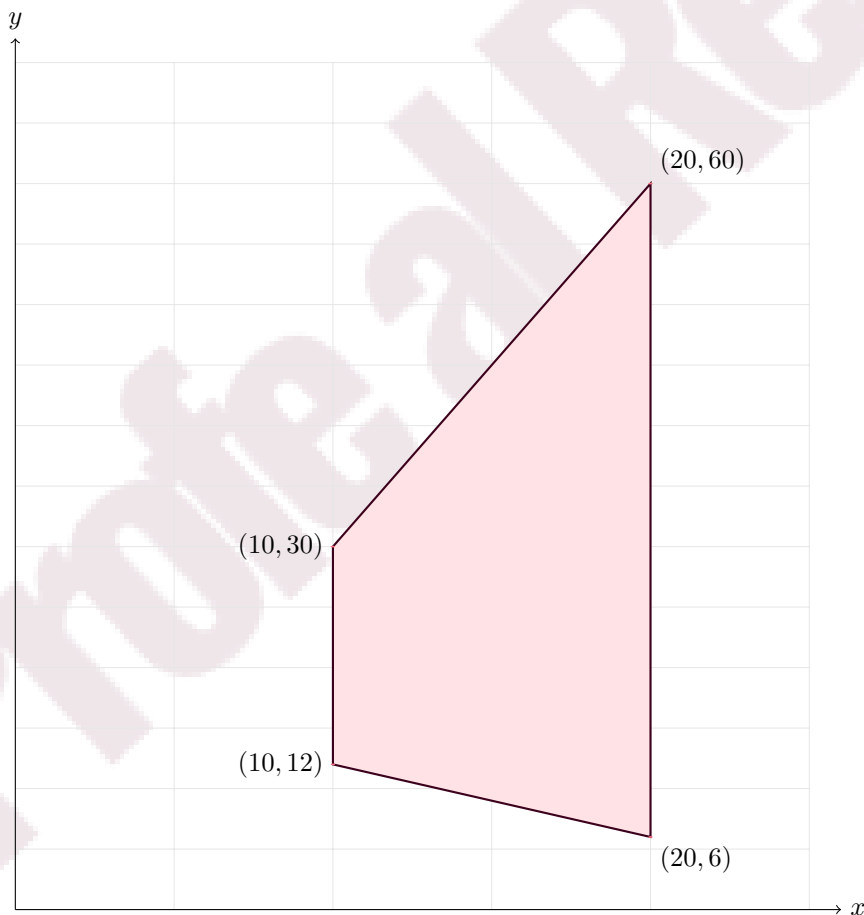
$$10 \leq x \leq 20, \quad y \leq 3x, \quad 12x + 20y \geq 360.$$

La última frontera puede escribirse $y = 18 - 3x/5$. Intersectamos ambas rectas oblicuas con los límites verticales:

	$y = 3x$	$y = 18 - 3x/5$
$x = 10$	(10, 30)	(10, 12)
$x = 20$	(20, 60)	(20, 6)

Estos cuatro puntos cumplen las desigualdades y son los vértices de la región factible. Evaluamos $F(x, y) = x - 2y$:

(x, y)	(10, 12)	(10, 30)	(20, 60)	(20, 6)
$x - 2y$	-14	-50	-100	8



El mínimo es -100 y se alcanza en $(20, 60)$.

$$\min F = -100 \text{ en el punto } (20, 60).$$

Problema 2 · Extremos de la cotización

La función es $f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}$ en el intervalo cerrado $[0, 8]$. Como $x^2 + 21 > 0$, es continua en todo el intervalo. Derivamos para hallar los extremos:

$$f'(x) = 35,7 \frac{-x^2 - 4x + 21}{(x^2 + 21)^2} = -35,7 \frac{(x+7)(x-3)}{(x^2 + 21)^2}.$$

El denominador es positivo y el numerador se anula en $x = -7$ y $x = 3$. Solo $x = 3$ pertenece a $[0, 8]$. La derivada es positiva entre 0 y 3 y negativa entre 3 y 8, así que $x = 3$ es el máximo absoluto. Comparamos el valor en el punto crítico con los extremos del intervalo:

$$f(0) = \frac{17}{5} = 3,4, \quad f(3) = \frac{119}{20} = 5,95, \quad f(8) = \frac{21}{5} = 4,2.$$

El máximo absoluto se alcanza en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 0$.

Al comprar veinte acciones en $x = 0$ y venderlas en $x = 8$, comparamos el precio de venta con el de compra:

$$20f(0) = 20 \cdot 3,4 = 68 \text{ €}, \quad 20f(8) = 20 \cdot 4,2 = 84 \text{ €}.$$

Como los ingresos de la venta superan en $84 - 68 = 16$ euros el coste de compra, obtuvo ganancias.

$\max f = 5,95 \text{ € en } x = 3; \quad \min f = 3,40 \text{ € en } x = 0; \quad \text{ganancia} = 16 \text{ €}.$

Problema 3 · Experiencia y formación

Sean E «tiene experiencia» y F «tiene formación acorde». El enunciado da $P(E \cap F) = 0,70$, $P(E \cap \bar{F}) = 0,20$ y $P(E | F) = 0,875 = 7/8$.

Primero determinamos la probabilidad de tener formación acorde:

$$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{7}{8} \implies P(F) = \frac{0,70}{7/8} = 0,80.$$

Por tanto, $P(\bar{F}) = 0,20$ y $P(E) = 0,70 + 0,20 = 0,90$.

a) $P(\bar{E}) = 1 - 0,90 = 0,10$.

b) Condicionamos al suceso de que el solicitante sí tenga experiencia:

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0,70}{0,90} = \frac{7}{9}.$$

c) Los solicitantes sin formación acorde representan 0,20, y todos ellos están dentro de E porque $P(E \cap \bar{F}) = 0,20$. Así,

$$P(\bar{F} \cap \bar{E}) = P(\bar{F}) - P(E \cap \bar{F}) = 0,20 - 0,20 = 0.$$

$P(\bar{E}) = 0,10; \quad P(F E) = \frac{7}{9}; \quad P(\bar{F} \cap \bar{E}) = 0.$

Opción B

Problema 1 · Sistema de ecuaciones matriciales

Las relaciones son

$$X + 2Y = A^t + B, \quad X - Y = AB,$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la segunda igualdad, $X = AB + Y$. Sustituyendo en la primera obtenemos $3Y = A^t + B - AB$. Calculamos por separado:

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

y al sumar AB recuperamos X :

$$X = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{3} & -1 \\ 7 & 3 & \frac{7}{3} \\ 9 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{3} & -1 \\ 7 & 3 & \frac{7}{3} \\ 9 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Beneficio de un fondo

La cantidad invertida x y el beneficio $B(x)$ se expresan en miles de euros. La función es

$$B(x) = \begin{cases} -0,01x^2 + 0,09x + 0,1, & 0 < x \leq 8, \\ 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02, & x > 8. \end{cases}$$

a) Cada tramo es continuo en su intervalo. En el punto de unión,

$$B(8) = -0,01(64) + 0,09(8) + 0,1 = 0,18,$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} B(x) = 1,26 \frac{8}{64 - 1} + 0,02 = 0,18.$$

La función es continua en todo su dominio $]0, +\infty[$.

b)–c) En el primer tramo,

$$B'(x) = -0,02x + 0,09 = 0 \implies x = 4,5.$$

La derivada es positiva si $0 < x < 4,5$ y negativa si $4,5 < x \leq 8$. En el segundo tramo,

$$B'(x) = 1,26 \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -1,26 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

Por ello, el beneficio crece hasta $x = 4,5$ y después decrece, también al pasar por $x = 8$ porque la función es continua allí. El máximo se alcanza invirtiendo 4,5 miles de euros:

$$B(4,5) = -0,01(4,5)^2 + 0,09(4,5) + 0,1 = 0,3025$$

miles de euros, es decir, 302,50 euros.

d) Para un capital muy elevado usamos el segundo tramo:

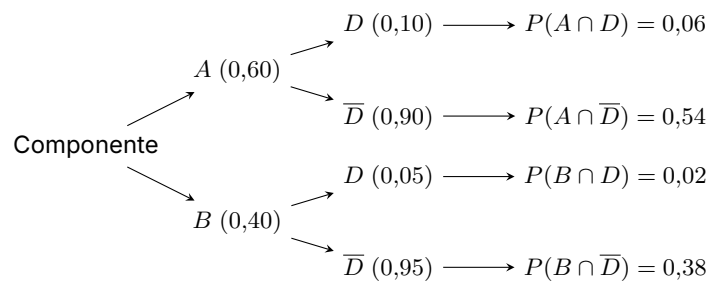
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 0,02 \text{ miles de euros} = 20 \text{ €}.$$

Como $1,26x/(x^2 - 1) > 0$ para $x > 8$, el beneficio se acerca a 20 euros por encima de esa cantidad; 20 euros es su límite inferior, no un valor alcanzado.

Máximo 302,50 € al invertir 4500 €; $B(x) \rightarrow 20$ € por encima al crecer x .

Problema 3 · Componentes electrónicos defectuosos

Sean A y B los sucesos de que el componente proceda de cada máquina y D el suceso «es defectuoso». En el árbol, cada probabilidad conjunta se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas del camino:



a) Sumamos los dos caminos que terminan en un componente defectuoso:

$$P(D) = P(A)P(D | A) + P(B)P(D | B) = 0,60(0,10) + 0,40(0,05) = 0,08.$$

b) Para calcular la probabilidad de que proceda de A sabiendo que no es defectuoso, usamos

$$P(A | \bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,60(0,90)}{1 - 0,08} = \frac{0,54}{0,92} = \frac{27}{46}.$$

c) El camino «máquina B y componente defectuoso» tiene probabilidad

$$P(B \cap D) = P(B)P(D | B) = 0,40(0,05) = 0,02.$$

$P(D) = 0,08; \quad P(A \bar{D}) = \frac{27}{46}; \quad P(B \cap D) = 0,02.$
--