

Se desarrollan las dos opciones del examen, con el razonamiento necesario para seguir cada método.

Opción A - Ejercicio 1

Sean $a, b > 0$ los catetos. La hipotenusa fija impone $a^2 + b^2 = 25$, mientras que el área es $A = ab/2$. Por la desigualdad

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

se tiene $ab \leq 25/2$ y, por tanto, $A \leq 25/4$. La igualdad se alcanza cuando $a = b$, de modo que

$$2a^2 = 25 \implies a = b = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ m}, \quad A_{\max} = \frac{25}{4} \text{ m}^2.$$

Opción A - Ejercicio 2

Integramos $\ln(x+2)$ por partes: tomamos $u = \ln(x+2)$ y $dv = dx$, así $du = dx/(x+2)$ y $v = x$. Entonces

$$\int \ln(x+2) dx = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = (x+2) \ln(x+2) - (x+2) + C.$$

La condición $F(0) = 0$ determina $C = 2 - 2 \ln 2$. Por tanto, para $x > -2$,

$$F(x) = (x+2) \ln(x+2) - (x+2) + 2 - 2 \ln 2.$$

Opción A - Ejercicio 3

Las dos primeras ecuaciones son independientes. Restando la segunda de la primera obtenemos $x + y = 9$. Para que la tercera ecuación no añada una condición nueva, debe ser precisamente esa combinación; esto ocurre si $\lambda = 0$, pues entonces es $x + y = 9$. En ese caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, así que Rouché–Frobenius da un sistema compatible indeterminado.

$\lambda = 0$ produce infinitas soluciones.

Si $\lambda \neq 0$, el vector de coeficientes $(1, 1, \lambda)$ no es combinación redundante de las dos primeras filas: el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual al de la ampliada y al número de incógnitas. El sistema es entonces compatible determinado. Por tanto, no hay ningún valor de λ que lo haga incompatible:

No existe ningún valor de λ para el que el sistema no tenga solución.

Opción A - Ejercicio 4

El plano equidistante de A y B es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por su punto medio. Como

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, 2), \quad M = (0, 1, 3),$$

la condición $\overrightarrow{AB} \cdot ((x, y, z) - M) = 0$ da

$$-2x + 2(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \implies \boxed{x - y - z + 4 = 0}.$$

Para el plano que contiene A, B y es paralelo a r , usamos dos vectores directores: $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 2)$ y $\vec{d}_r = (2, 1, 3)$. Su producto vectorial es un vector normal:

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{d}_r = (4, 10, -6) = 2(2, 5, -3).$$

Con normal $(2, 5, -3)$ y pasando por $A(1, 0, 2)$, resulta

$$2(x - 1) + 5y - 3(z - 2) = 0 \implies \boxed{2x + 5y - 3z + 4 = 0}.$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $(0, +\infty)$ porque el argumento del logaritmo debe ser positivo. La pendiente de la recta $x - 2y + 1 = 0$ es $1/2$. Calculamos

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x}.$$

Para que la tangente sea paralela, igualamos las pendientes:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \text{ o } x = -2.$$

Solo $x = 3$ pertenece al dominio. El punto es $(3, \ln 18)$ y la tangente allí tiene pendiente $1/2$; la normal tiene pendiente -2 . Por ello,

$$y - \ln 18 = \frac{1}{2}(x - 3),$$

$$y - \ln 18 = -2(x - 3).$$

Opción B - Ejercicio 2

Las curvas se cortan cuando $x^2 + ax = -x$, es decir, en $x = 0$ y $x = -(a+1)$. En ese intervalo la recta $y = -x$ queda por encima de la parábola, por lo que el área es

$$\mathcal{A} = \int_{-(a+1)}^0 [-x - (x^2 + ax)] dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2} \right]_{-(a+1)}^0 = \frac{(a+1)^3}{6}.$$

Imponiendo $\mathcal{A} = 36$ y teniendo en cuenta que $a > 0$:

$$(a+1)^3 = 216 \implies a+1 = 6 \implies \boxed{a = 5}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante no es cero. Desarrollando por la primera fila,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = -(2\alpha - 3)(\alpha - 2).$$

Así, A es invertible si $\alpha \neq 3/2, 2$. Para $\alpha = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

La comprobación directa es $AX = (-2, 3, 4)^T = B$, luego

$$X = (-34, -5, 14)^T.$$

Opción B - Ejercicio 4

Tomamos $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = D - A = (1, -2, 1)$. El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de estos vectores:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{6}.$$

El plano ABC tiene como normal $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -5)$; podemos usar $(2, 1, 5)$. La recta perpendicular que pasa por $D(2, -1, 2)$ tiene ese vector como dirección:

$$x = 2 + 2t, \quad y = -1 + t, \quad z = 2 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$