

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 – 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

- 1.1 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?
- 1.2 **(0.75 puntos)** Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?
- 1.3 **(1 punto)** Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

Solución:

- 1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?

Sean los sucesos $Ens = \text{"la obra preferida es ensayo"}$ y $NEns = \text{"la obra preferida no es ensayo"}$
 Debemos obtener $P(NEns)$.

$$P(NEns) = 1 - P(Ens) = 1 - \frac{10}{120} = \frac{11}{12} \cong 0'9167$$

La probabilidad pedida es 0'9167.

- 1.2 Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?

Sean los sucesos $NPoe = \text{"la obra preferida no es poesía"}$ y $E25+ = \text{"tenga 25 años o más"}$

Debemos calcular $P(E25+ / NPoe)$

$$P(E25+ / NPoe) = \frac{P(E25+ \cap NPoe)}{P(NPoe)} = \frac{\frac{30+21+9}{120}}{1 - \frac{35}{120}} = \frac{\frac{60}{120}}{\frac{85}{120}} = \frac{60}{85} = \frac{12}{17} \cong 0'7059$$

La probabilidad pedida es 0'7059.

1.3 Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

Consideramos los miembros del club entre 25 y 60 años. La probabilidad de que uno de ellos tenga como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos será:

$$P(A) = \frac{10+3}{22+17+10+3} = \frac{1}{4} = 0'25$$

Consideramos la variable $X = n^{\circ}$ de miembros entre 25 y 60 años, ambos incluidos, que prefieren o bien teatro o bien ensayo, entonces $X = B(10, 0'25)$.

Debemos calcular $P(X \leq 3)$.

Directamente:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \\ &= \binom{10}{0} 0'25^0 0'75^{10} + \binom{10}{1} 0'25^1 0'75^9 + \binom{10}{2} 0'25^2 0'75^8 + \binom{10}{3} 0'25^3 0'75^7 = 0'77587... \cong 0'7759 \end{aligned}$$

En la tabla para $n = 10$, $p = 0'25$ y $k = 3$ se obtiene que $P(X \leq 3) = 0'7759$.

La probabilidad pedida es 0'7759.

2.1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

2.1.1 **(0.75 puntos)** La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 **(0.75 puntos)** Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{0}$ la matriz nula 2×2 .

2.1.3 **(1 punto)** A^{12} .

Solución:

2.1.1 ¿Matriz X ? / $2AX = BX + I$.

A partir de la expresión anterior vamos a intentar despejar la matriz X .

$$2AX = BX + I; \quad 2AX - BX = I; \quad (2A - B)X = I \rightarrow X = (2A - B)^{-1}$$

$$\text{Calculemos } 2A - B = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|2A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \exists (2A - B)^{-1}$$

Calculemos $(2A - B)^{-1}$,

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (2A - B)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2.1.2 ¿ α ? / $4A^2 + \alpha A - I = \mathbf{0}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$4A^2 + \alpha A - I = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para que $\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 0.$

Solución: $\alpha = 0.$

2.1.3) A^{12}

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{1}{16} \\ 0 & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^2 A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

Para n par:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^4 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^6 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^{12} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}$$

Solución: $A^{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}.$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1-a \\ 1+a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1-a \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2(1+a) + a - 4a + 3 - (1+a) = 6 - 2 - 2a + a - 4a + 3 - 1 - a = 6 - 6a$$

$$6 - 6a = 0; \quad 6 = 6a; \quad a = \frac{6}{6} = 1$$

Si $a \neq 1$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de A . Sabemos que $|A| = 0$ y que $\text{ran}(A) \geq 2$, por lo tanto $\text{ran}(A) = 2$.

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Solución, si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado;
si $a = 1$, el sistema es incompatible.

2.2.2 El sistema es compatible (en concreto, compatible y determinado) para $a \neq 1$.

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

$$|A| = 6 - 6a, \quad \{a \neq -1 \rightarrow 6 - 6a \neq 0\}$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6-6a} = \frac{2(1-a) - 2a + (1-a) - 4(1-a) + (1-a) - a}{6-6a} = \frac{-3a}{6-6a} = \frac{a}{2a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-a & 2 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{6-6a} = \frac{3a + 2(1+a)(1-a) + a(1-a) - 2a^2 - 3(1-a) - (1+a)(1-a)}{6-6a} =$$

$$= \frac{3a + (1+a)(1-a) + a(1-a) - 2a^2 - 3(1-a)}{6-6a} = \frac{3a + 1 - a^2 + a - a^2 - 2a^2 - 3 + 3a}{6-6a} = \frac{-4a^2 + 7a - 2}{6-6a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ a & -1 & 1-a \end{vmatrix}}{6-6a} = \frac{6(1-a) - (1+a)(1-a) + a^2 - 2a(1-a) + 3a - (1+a)(1-a)}{6-6a} =$$

$$= \frac{6-6a-1+a^2+a^2-2a+2a^2+3a-1+a^2}{6-6a} = \frac{5a^2-5a+4}{6-6a}$$

Si $a \neq 1$, la solución es:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2a-2} \\ y = \frac{-4a^2+7a-2}{6-6a} \\ z = \frac{5a^2-5a+4}{6-6a} \end{cases}$$

3.1 Dados el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P = (0,1,2)$ es 2.

Solución:

3.1.1) ¿Plano σ ? / $\sigma \perp \pi$ y $r \subset \sigma$.

Para obtener la ecuación del plano σ debemos obtener un punto y dos vectores directores de este plano.

$r \subset \sigma \rightarrow P_r$ y $\vec{v}_r$ serán punto y uno de los vectores directores de σ .

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases} \text{ obtengamos su ecuación paramétrica: } \begin{cases} y = 2x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Por tanto, $P_r = (0,0,0)$ y $\vec{v}_r = (1,2,2)$

Como $\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ será vector director de σ ; $\vec{n}_\pi = (2,0,-1)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$ no son paralelos $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1}\right)$, serán vectores directores del plano σ .

Obtengamos la ecuación del plano,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x + 5y - 4z = 0; \quad 2x - 5y + 4z = 0$$

La ecuación del plano pedido es $2x - 5y + 4z = 0$.

3.1.2) ¿Planos γ ? / $\gamma \parallel \pi$ y $d(P, \gamma) = 2$.

Los planos paralelos a π tendrán por ecuación $2x - z + D = 0$

$$d(P, \gamma) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|D - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|D - 2|}{\sqrt{5}} = 2; \quad |D - 2| = 2\sqrt{5} \quad \begin{cases} D - 2 = 2\sqrt{5}; & D = 2 + 2\sqrt{5} \\ D - 2 = -2\sqrt{5}; & D = 2 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Los planos pedidos son: $\gamma_1: 2x - z + 2 + 2\sqrt{5}$ y $\gamma_2: 2x - z + 2 - 2\sqrt{5}$.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

Solución:

3.2.1) ¿Triángulo $ABC \in$ Plano π ?

El triángulo ABC pertenecerá al plano π si los tres puntos (A , B y C) están en el plano.

Comprobémoslo:

$$¿A \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \quad \text{Sí}$$

$$¿B \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0?, \quad ¿40 = 0? \quad \text{No}$$

Por tanto, el triángulo ABC no pertenece al plano π

3.2.2) Calcular la distancia del punto D al plano π .

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto D al plano π es: $\frac{9}{\sqrt{14}}$.

3.2.3) Coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

Obtendremos el punto pedido realizando los siguientes cálculos:

$$1) \text{ Sea } \sigma \text{ el plano formado por } A, B \text{ y } C \rightarrow \begin{cases} P_\sigma = A(0,0,0) \\ \vec{v}_1 = \vec{AB} = (10,0,-20) \\ \vec{v}_2 = \vec{AC} = (0,15,-30) \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 150z + 300x + 300y = 0 \rightarrow 2x + 2y + z = 0$$

2) Sea s la recta que pasa por D y es perpendicular al plano σ .

$$s: \begin{cases} P_s = D(1,2,-1) \\ \vec{v}_s = \vec{n}_\sigma = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

3) Corte entre la recta s y el plano σ .

$$2(1 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0; \quad 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 5 + 9\lambda = 0; \quad 9\lambda = -5;$$

$$\lambda = \frac{-5}{9}$$

4) Cálculo del punto proyección.

Sustituyendo el valor de λ obtenido anteriormente en la ecuación de la recta s :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 1 + 2 \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \frac{-5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C son

$$\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9} \right).$$

Tu Profe al Rescate

4.1 Sea la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}.$$

4.1.1 **(0.75 puntos)** Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 **(0.25 puntos)** Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 **(0.75 puntos)** Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 **(0.75 puntos)** Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Solución:

4.1.1

Dom $f(x)$,

$$9 - x^2 = 0; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \quad \rightarrow \quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

Asíntotas:

verticales,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-3}{9 - (-3)^2} = \frac{-3}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{3}{9 - 3^2} = \frac{3}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

horizontal,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9 - x^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9 - x^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como $f(x)$ es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ **y sus asíntotas son** $x = -3$, $x = 3$ **e** $y = 0$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en su dominio.

$$f'(x) = \frac{1(9 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{9 - x^2 + 2x^2}{(9 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 9}{(9 - x^2)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador.

$$x^2 + 9 = 0; \quad x^2 = -9; \quad x = \pm\sqrt{-9} \text{ no tiene soluciones reales.}$$

$$(9 - x^2)^2 = 0; \quad 9 - x^2 = 0; \quad \{\text{resuelta antes}\} \quad x = \pm 3$$

En $f'(x)$ el numerador es positivo y el denominador, como está elevado al cuadrado, también es positivo. Por tanto, $f(x)$ es creciente en su dominio.

$f(x)$ es creciente en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

4.1.2 Dibujar la curva $y = f(x)$.

De $f(x)$ conocemos: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$, asíntotas verticales $x = -3$, $x = 3$, asíntota horizontal $y = 0$ y creciente en su dominio.

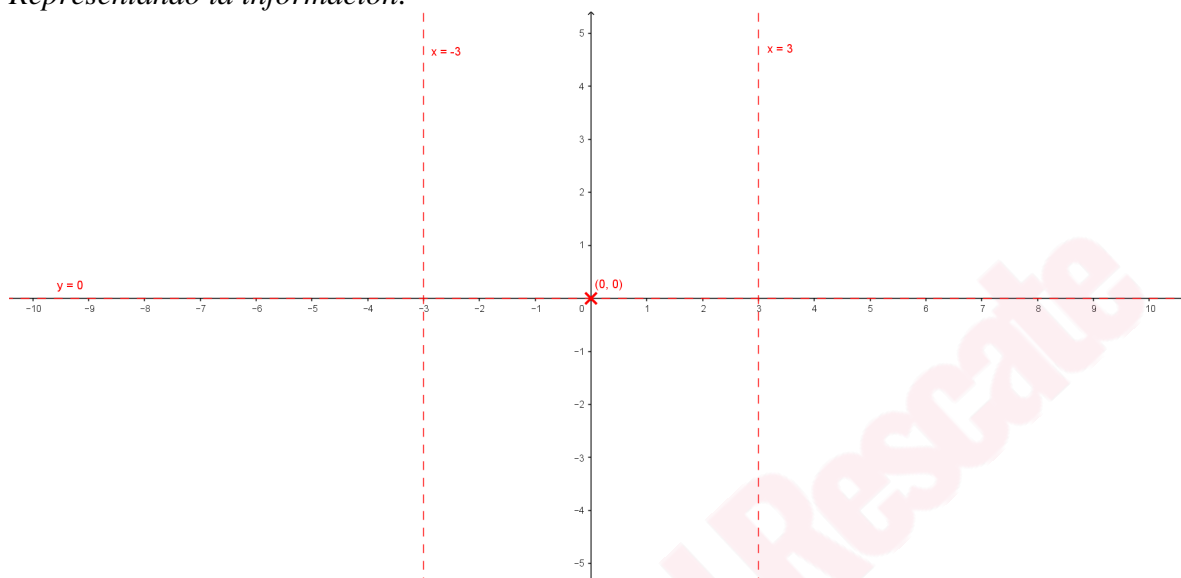
Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$x = 0, \quad f(0) = \frac{0}{9 - 0^2} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

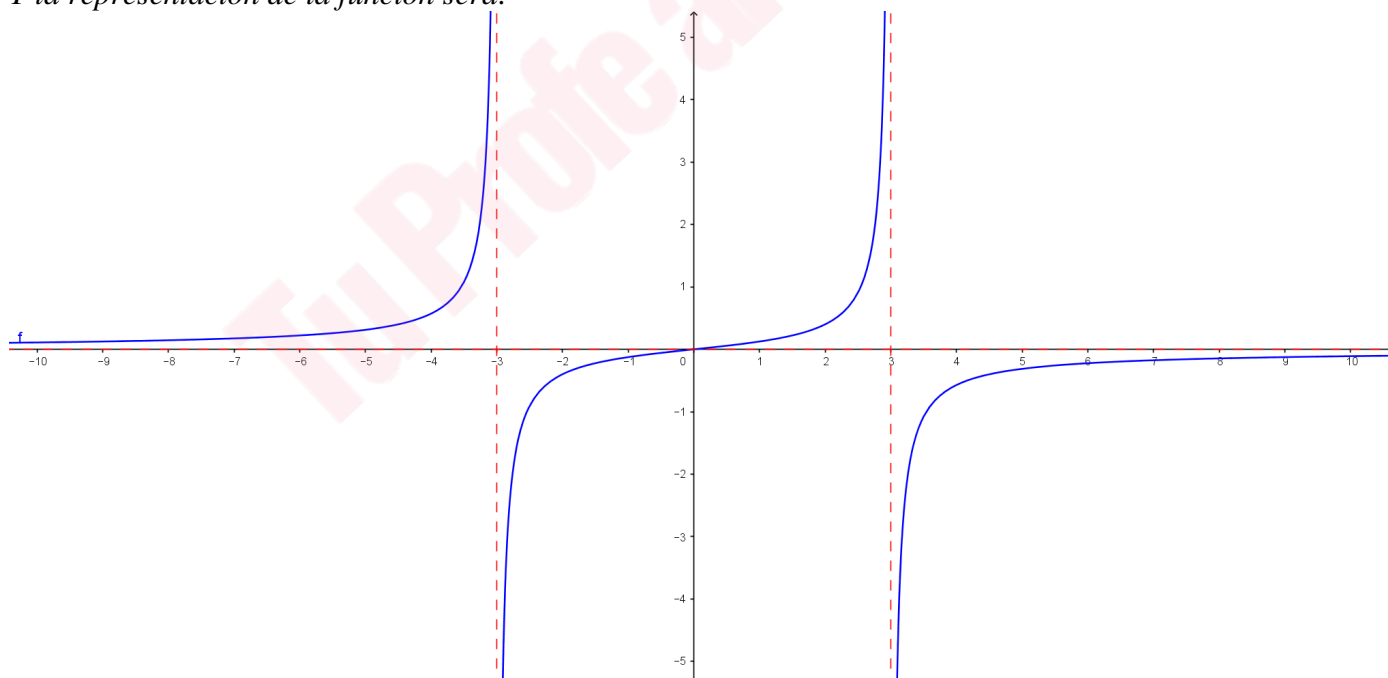
punto de corte $(0, 0)$

$$f(x) = 0, \quad \frac{x}{9 - x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Representando la información:



Y la representación de la función será:



4.1.3) Hallar todas las primitivas de f .

Debemos calcular la siguiente integral racional:

$$\int \frac{x}{9 - x^2} dx$$

Descompongamos el integrando,

$$\frac{x}{9-x^2} = \frac{x}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x) + B(3-x)}{(3-x)(3+x)} \rightarrow x = A(3+x) + B(3-x)$$

$$x=3, \quad 3 = A(3+3) + B(3-3); \quad 3 = 6A; \quad A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x=-3, \quad -3 = A(3-3) + B(3-(-3)); \quad -3 = 6B; \quad B = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

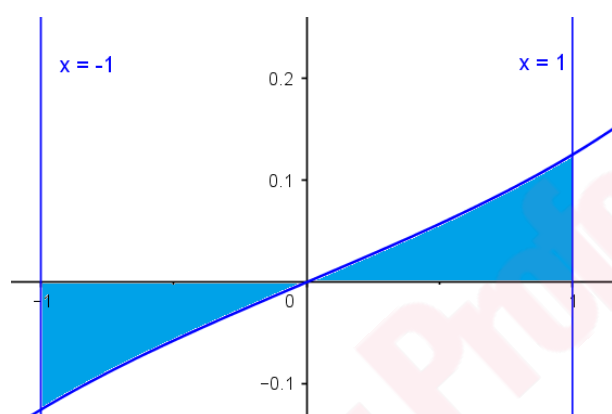
$$\int \frac{x}{9-x^2} dx = \int \frac{1/2}{3-x} dx + \int \frac{-1/2}{3+x} dx = \frac{1}{2} (-1) \operatorname{Ln} |3-x| - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |3+x| + C = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |3-x| - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |3+x| + C =$$

$$= -\frac{1}{2} (\operatorname{Ln} |3-x| + \operatorname{Ln} |3+x|) + C = -\frac{1}{2} [\operatorname{Ln} (|3-x| |3+x|)] + C = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-x^2| + C$$

Por tanto, $\int \frac{x}{9-x^2} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-x^2| + C$

4.1.4) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

El área a calcular es la de la zona sombreada.



Como una parte está por debajo del eje OX debemos calcular dos integrales definidas:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-x^2| \right]_{-1}^0 = \left[\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-0^2| \right) - \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-(-1)^2| \right) \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9 + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8 < 0$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9 - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-x^2| \right]_0^1 = \left[\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-1^2| \right) - \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |9-0^2| \right) \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8 + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9 > 0$$

$$\rightarrow A_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8 + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9$$

Finalmente, $A = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9 - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8 - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 8 + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 9 = \operatorname{Ln} 9 - \operatorname{Ln} 8 = \operatorname{Ln} \frac{9}{8} = 0'117783... \cong 0'1178$

El área pedida mide $\operatorname{Ln} \frac{9}{8} \cong 0'1178$.

4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga un área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

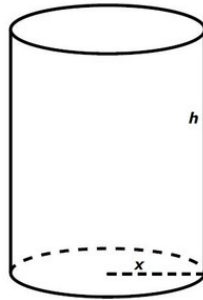
4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

Solución:

Cilindro de 33 cm^3 de volumen



4.2.1 Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

El radio de la base del bote mide $x \text{ cm}$ y su altura $h \text{ cm}$ (medidos en cm porque el volumen está en cm^3).

El área total del bote es el área lateral más el área de las dos bases:

$$A_T = 2 \pi x h + 2 \pi x^2$$

4.2.2 Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

El área total del bote está expresada en función de dos variables, x y h , para poder encontrar el mínimo hay que relacionar ambas variables.

Utilizamos la condición de que el volumen del depósito debe ser 33 cm^3 .

El volumen del cilindro es: $V_c = \pi x^2 h$, por lo tanto $\pi x^2 h = 33 \rightarrow h = \frac{33}{\pi x^2}$

$$A_T = 2 \pi x \frac{33}{\pi x^2} + 2 \pi x^2 = \frac{66}{x} + 2 \pi x^2 \quad \text{Dom } A_T = (0, +\infty)$$

$$A'_T = \frac{-66}{x^2} + 4 \pi x$$

$$\frac{-66}{x^2} + 4 \pi x = 0; \quad -66 + 4 \pi x^3 = 0; \quad 4 \pi x^3 = 66; \quad x^3 = \frac{66}{4 \pi}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{66}{4 \pi}} = 1.738246...$$

$$A''_T = \frac{132}{x^3} + 4 \pi;$$

$$A''_T = \left(\sqrt[3]{\frac{66}{4 \pi}} \right) = \frac{132}{\left(\sqrt[3]{\frac{66}{4 \pi}} \right)^3} + 4 \pi = \frac{132}{\frac{66}{4 \pi}} + 4 \pi = 12 \pi > 0 \rightarrow \text{En } x = \sqrt[3]{\frac{66}{4 \pi}} \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Para comprobar que es el absoluto obtengamos el signo de A'_T su izquierda y derecha.

x	$A'_T = \frac{-66}{x^2} + 4\pi x$	
1	$\frac{-66}{1^2} + 4\pi \cdot 1 = -53'43... < 0 \rightarrow A_T \text{ es decreciente}$	Como a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente el mínimo relativo es el absoluto de A_T .
2	$\frac{-66}{2^2} + 4\pi \cdot 2 = 8'63... > 0 \rightarrow A_T \text{ es creciente}$	

$$\text{Para } x = \sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \cong 1'7382, \quad h = \frac{33}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \right)^2} = 3'476492... \cong 3'4765$$

Las dimensiones que minimizan el área total del bote son: radio de la base 1'7382 cm y altura 3'4765 cm.

4.2.3 Hallar dicha área.

$$A_T = \frac{66}{x} + 2\pi x^2$$

$$\text{Para } x = 1'7382 \rightarrow A_T = \frac{66}{1'7382} + 2\pi (1'7382)^2 = 56'953948... \cong 56'9540 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } x = \sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \rightarrow A_T = \frac{66}{\sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}}} + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{66}{4\pi}} \right)^2 = 56.953948... \cong 56'9540 \text{ cm}^2$$

Utilizando los valores aproximados de x y h :

$$A_T = 2\pi x h + 2\pi x^2$$

$$A_T = 2\pi x h + 2\pi x^2 = 2\pi (1'7382)(3'4765) + 2\pi (1'7382)^2 = 56'951995... \cong 56'9520 \text{ cm}^2$$

El área total mínima del bote es de 59'9540 cm².