

Soluciones originales de las dos opciones, con desarrollo suficiente para seguir el razonamiento en cada apartado.

Opción A

Ejercicio 1 · Modelización y programación lineal

a) Sean x el número de coches e y el de motos. Las condiciones del barco se traducen, respectivamente, en

$$y \geq \frac{x}{4}, \quad y \leq 2x, \quad 2x + y \leq 100, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

El total de vehículos que se quiere maximizar es $V = x + y$. Por tanto, el modelo pedido es

$\text{Maximizar } V = x + y \text{ sujeto a las restricciones anteriores.}$

b) Las rectas frontera son $y = 30$, $y = 3x - 150$ y $6x + 7y = 840$. Sus intersecciones que delimitan el recinto son:

$$\begin{aligned} y = 30, \quad 3x - y = 150 &\implies (60, 30), \\ y = 30, \quad 6x + 7y = 840 &\implies (105, 30), \\ 3x - y = 150, \quad 6x + 7y = 840 &\implies (70, 60). \end{aligned}$$

Como $F(x, y) = 6x - 2y$ es lineal, sus extremos en el recinto se obtienen en los vértices. Evaluamos:

(x, y)	$(60, 30)$	$(105, 30)$	$(70, 60)$
$F(x, y)$	300	570	300

Además, en el lado $3x - y = 150$ se tiene $y = 3x - 150$, y entonces $F = 6x - 2(3x - 150) = 300$. Por ello, el mínimo se alcanza en todos los puntos de ese lado que pertenecen al recinto, es decir, en el segmento entre los dos vértices indicados.

$F_{\min} = 300$ en todo el segmento entre $(60, 30)$ y $(70, 60)$.

Ejercicio 2 · Continuidad y derivabilidad de una función a trozos

El dominio es $\mathbb{R}$: cada expresión está definida en su intervalo y no hay denominadores ni raíces que impongan restricciones. Las únicas posibles dificultades aparecen en los puntos de cambio, $x = 0$ y $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 3, \\ x^2 + 6x + 2, & x > 3. \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. La función es continua. Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = e^0 = 1, \quad f'_+(0) = 0.$$

No coinciden, así que f no es derivable en $x = 0$. En $x = 3$, el valor y el límite por la izquierda son 1, pero por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 6x + 2) = 9 + 18 + 2 = 29.$$

Hay una discontinuidad de salto en $x = 3$, y por ello tampoco es derivable allí. En el interior de cada tramo las expresiones son derivables.

f es continua en $x = 0$ pero no derivable allí; en $x = 3$ tiene una discontinuidad de salto y no es derivable.

Ejercicio 3 · Probabilidad total y teorema de Bayes

Sean G , M y P los sucesos «huevo grande», «mediano» y «pequeño», y D «huevo defectuoso». Las clases son incompatibles y cubren toda la producción. La probabilidad total de defecto suma las probabilidades de los tres caminos:

$$P(D) = P(G)P(D | G) + P(M)P(D | M) + P(P)P(D | P) = 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02 = 0,0355.$$

Para hallar la probabilidad de que un huevo defectuoso sea grande, invertimos la condición con Bayes:

$$P(G | D) = \frac{P(G)P(D | G)}{P(D)} = \frac{0,40 \cdot 0,05}{0,0355} = \frac{40}{71} \approx 0,5634.$$

$$P(D) = 0,0355; \quad P(G | D) = \frac{40}{71} \approx 0,5634.$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una media

El director afirma que la media poblacional no supera 25. Contrastamos esa afirmación frente a la alternativa de que sea mayor:

$$H_0 : \mu \leq 25, \quad H_1 : \mu > 25.$$

Se conoce $\sigma = 5$, $n = 225$ y $\bar{x} = 26$. Bajo el valor frontera $\mu_0 = 25$, el estadístico es

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad z_{\text{obs}} = \frac{26 - 25}{5/\sqrt{225}} = 3.$$

Para $\alpha = 0,05$, el valor crítico de una cola es $z_{0,95} \approx 1,645$. Como $3 > 1,645$, rechazamos H_0 . La media observada aporta evidencia estadística al 5% de que el IMC medio supera 25; por tanto, no se respalda la afirmación del director.

Se rechaza H_0 al 5%; hay evidencia de que $\mu > 25$.

Opción B

Ejercicio 1 · Potencias de matrices y ecuación matricial

Con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculamos primero

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

Como las potencias se repiten cada dos exponentes, $A^{2013} = A$, pues 2013 es impar (resto 1 al dividir entre 2).

La ecuación es $AX + I_2 = 5B^T - A^2$. Como ya hemos obtenido $A^2 = I_2$, sustituimos esta identidad y despejamos el término AX :

$$AX = 5B^T - 2I_2, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$5B^T - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $A^{-1} = A$, multiplicamos por A por la izquierda:

$$X = A \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = I_2; \quad A^{2013} = A; \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y tangente

La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 1, \\ x^2 - 6x + 6, & x > 1 \end{cases}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$. El único punto de unión es $x = 1$. En él, $f(1) = 1/2$, mientras que el límite por la derecha vale $1 - 6 + 6 = 1$. Como los límites laterales no coinciden, hay una discontinuidad de salto en $x = 1$ y la función no es derivable allí. En cada intervalo abierto, las ramas polinómicas son continuas y derivables. En $x = 0$ usamos la primera rama: $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1/2$. La recta tangente, con pendiente $f'(0)$ y que pasa por $(0, 0)$, es

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \implies y = \frac{x}{2}.$$

$$\text{Salto en } x = 1; \quad \text{tangente en } x = 0 : y = \frac{x}{2}.$$

Ejercicio 3 · Recuento y probabilidad condicionada

De los 105 accionistas, hay 45 menores de 40 años, 18 mayores de 60 y $105 - 45 - 18 = 42$ entre 40 y 60. Rechazan la propuesta 15 menores, 14 del grupo intermedio y 4 mayores; por tanto, aceptan, respectivamente, 30, 28 y 14.

La probabilidad de elegir a una persona menor de 40 que aceptó es

$$P(< 40 \cap \text{acepta}) = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}.$$

En total aceptaron $30 + 28 + 14 = 72$ personas, es decir, $72/105 = 24/35 \approx 68,57\%$, no el 80% afirmado por la prensa. Hubo $15 + 14 + 4 = 33$ rechazos. Si sabemos que la persona elegida rechazó, la probabilidad de que sea mayor de 60 es

$$P(> 60 \mid \text{rechaza}) = \frac{4}{33}.$$

$$P(< 40 \cap \text{acepta}) = \frac{2}{7}; \quad \text{aceptación total} = \frac{24}{35} \approx 68,57\%; \quad P(> 60 \mid \text{rechaza}) = \frac{4}{33}.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

La proporción observada es $\hat{p} = 160/400 = 0,4$, con $\hat{q} = 0,6$. Para un nivel de confianza del 90%, $z_{0,95} \approx 1,645$. El intervalo aproximado para la proporción poblacional es $\hat{p} \pm z\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$:

$$E = 1,645\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}} \approx 0,0403, \quad IC_{90\%}(p) = 0,4 \pm 0,0403 \approx (0,3597, 0,4403).$$

Para diseñar una nueva muestra con error máximo $E = 0,1$ y el mismo nivel, usamos la proporción estimada en el estudio anterior:

$$n \geq \frac{z_{0,95}^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2} = \frac{1,645^2 \cdot 0,4 \cdot 0,6}{0,1^2} \approx 64,94.$$

El tamaño debe ser entero y superar la cota, por lo que se necesitan al menos 65 personas.

$$IC_{90\%}(p) \approx (0,3597, 0,4403); \quad n_{\min} = 65.$$