



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) Determina a y b. **(1.5 puntos)**
- b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \sin(x) + c \sin(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f , así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(1 punto)**
- b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{e^x}} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$)



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + mz = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas. **(1.5 puntos)**
 b) Para $m = 2$, ¿existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

- a) Calcula razonadamente $\left| \frac{1}{3} A^{-1} A^t \right|$. **(0.5 puntos)**

- b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m . **(1.5 puntos)**
 b) Para $m = 1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s . **(1 punto)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a y b. (1.5 puntos)

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. (1 punto).

a) Para que sea derivable debe ser continua y por tanto debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax+b}{x-1} = \frac{0+b}{0-1} = -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0 \\ f(0) &= -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función debe ser derivable en $x = 0$, por lo que deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \frac{a(x-1)-(ax)}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{a(0-1)-(0)}{(0-1)^2} = -a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{1+0} = 1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 0$.

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

La ecuación de la recta normal en $x = 2$ es $y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2)$.

Calculamos el valor de la función y su derivada en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \ln(1+2) = \ln 3 \\ f'(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \ln 3}$$

La recta tangente es $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \ln 3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \ln 3 \\ f'(2) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \ln 3 = -\frac{1}{1/3}(x-2) \Rightarrow y - \ln 3 = -3(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 6 + \ln 3}$$

La recta normal es $y = -3x + 6 + \ln 3$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b\sin(x) + c\sin(2x)$ tiene un punto crítico en el punto de abscisa $x = \pi$ y la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Como la función tiene un punto crítico en $x = \pi$ la derivada debe anularse en dicho valor.

$$f(x) = a + b\sin(x) + c\sin(2x) \Rightarrow f'(x) = b\cos(x) + 2c\cos(2x)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = b\cos(x) + 2c\cos(2x) \\ f'(\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b\cos(\pi) + 2c\cos(2\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{-b + 2c = 0}$$

Si la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ deben cumplirse dos cosas:

Primero: Coinciden función y tangente en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = a + b\sin(0) + c\sin(2 \cdot 0) = a \\ y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Segundo: La pendiente de la recta normal es la inversa de la derivada cambiada de signo.

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow \text{pendiente} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{f'(0)} \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 2 \\ f'(x) = b\cos(x) + 2c\cos(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow b\cos(0) + 2c\cos(2 \cdot 0) = 2 \Rightarrow \boxed{b + 2c = 2}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b + 2c = 2 \\ -b + 2c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 2 - 2c \\ -b + 2c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 2c + 2c = 0 \Rightarrow 4c = 2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1}$$

Los valores buscados son $a = 3$; $b = 1$ y $c = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\ln(x))^2$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f , así como sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(1 punto)**
 b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. **(1.5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = (\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x) = 2(\ln(x)) \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$$

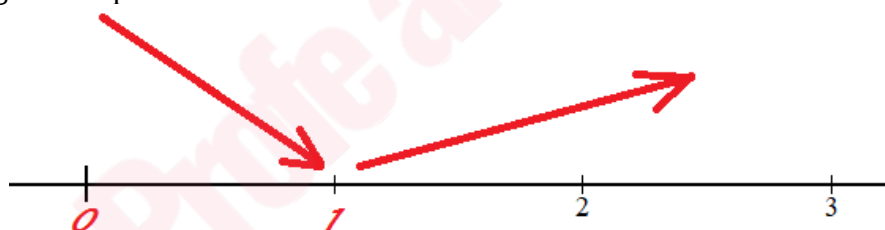
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow 2\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \in (0, +\infty)$$

Vemos que ocurre antes y después de $x = 1$.

En $(0,1)$ tomo $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2\ln(0.5)}{0.5} \approx -2.77 < 0$. La función decrece en $(0,1)$

En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2\ln(2)}{2} \approx 0.69 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$

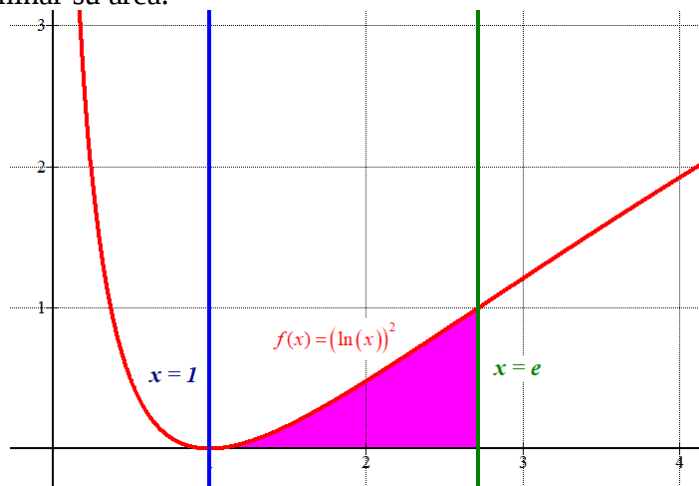
La función sigue el esquema:



La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

Como $f(1) = (\ln(1))^2 = 0$ la función tiene un mínimo relativo en $x = 1$ tomando la función el valor $f(1) = 0$.

- b) Dibujamos las rectas y la gráfica de la función. Coloreamos de rosa la región del plano de la cual queremos determinar su área.



El área de la región se calcula con la integral definida siguiente:

$$\text{Área} = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (\ln(x))^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = (\ln(x))^2 \Rightarrow du = \frac{2\ln(x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x(\ln(x))^2 - \int x \frac{2\ln(x)}{x} dx =$$

$$= x(\ln(x))^2 - \int 2\ln(x) dx = x(\ln(x))^2 - 2 \int \ln(x) dx = \dots$$

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x$$

$$\dots = x(\ln(x))^2 - 2(x \ln(x) - x) = \boxed{x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x + K}$$

Calculamos el valor del área pedida.

$$\text{Área} = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = \left[x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x \right]_1^e =$$

$$= e(\ln(e))^2 - 2e \ln(e) + 2e - \left[1 \cdot (\ln(1))^2 - 2 \ln(1) + 2 \right] = e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2 = \boxed{e - 2 \simeq 0.72 u^2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{e^x} = e^{x/2} \rightarrow dt = e^{x/2} \cdot \frac{1}{2} dx \rightarrow dx = \frac{2dt}{e^{x/2}} = \frac{2dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1+t} \frac{2dt}{t} =$$

$$= 2 \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A(1+t)}{t(1+t)} + \frac{Bt}{t(1+t)} = \frac{A(1+t) + Bt}{t(1+t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+t) + Bt \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow 1=A \\ t=-1 \rightarrow 1=-B \rightarrow B=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}}$$

$$\dots = 2 \left[\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{1+t} dt \right] = 2 [\ln t - \ln(1+t)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = \sqrt{e^x} = e^{x/2} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \left[\ln(e^{x/2}) - \ln(1+e^{x/2}) \right] = 2 \left[\frac{x}{2} - \ln(1+e^{x/2}) \right] = x - 2 \ln(1+e^{x/2}) + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{e^x}} dx = \left[x - 2 \ln(1+e^{x/2}) \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 - 2 \ln(1+e^{2/2}) \right] - \left[0 - 2 \ln(1+e^{0/2}) \right] = \boxed{2 - 2 \ln(1+e) + 2 \ln(2) \approx 0.76}$$

BLOQUE B**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + mz = 0 \end{cases}$$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hálalas. **(1.5 puntos)**b) Para $m = 2$, ¿existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} = -m + 2 + 12 - 2 - 3m + 4 = 16 - 4m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 16 - 4m = 0 \Rightarrow 4m = 16 \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

Estudiamos por separado 2 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 4$ En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = 4$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para

obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ -3 \quad -3 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -8 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 12 \quad 24 \quad 0 \\ 0 \quad -12 \quad -24 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

El sistema tiene infinitas soluciones cuando $m = 4$. Determinamos las soluciones partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -4y - 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2z + 2z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$$

Las soluciones son: $x = 0$; $y = -2t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

- b) Para $m = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución. Sustituimos $m = 2$ y $z = 1$ e intentamos resolver.

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - y \\ 3x - y - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(-2 - y) - y - 2 = 0 \\ -(-2 - y) + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 - 3y - y - 2 = 0 \\ 2 + y + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y = 8 \\ 3y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{-4} = -2 \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible! } -2 \neq \frac{-4}{3}!$$

Para $m = 2$ no existe ninguna solución tal que $z = 1$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left| \frac{1}{3} A^{-1} A^t \right|$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

a) Sabemos que $|A| = 2$, por lo que $|A^t| = |A| = 2$ y también $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{1}{3} A^{-1} A^t \right| = \begin{cases} \text{Determinante de un número por una matriz cuadrada de orden 3} = \\ = (\text{número})^3 \cdot \text{Determinante de matriz} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A^{-1} A^t| = \begin{cases} \text{Determinante de un producto de matrices de orden 3} = \\ = \text{Producto de determinantes} \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{27} |A^{-1}| \cdot |A^t| = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{\frac{1}{27}}$$

b) Sabemos que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

El primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{ \text{Sacamos factor común 2 en 1ª fila} \} = 2 \begin{vmatrix} 3c & b & a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sacamos factor común 3 en 1ª columna} \} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \text{Intercambiamos columna 1ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{cases} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = \boxed{-12}$$

El segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio columna 3ª y 2ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ 2-4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separo el determinante en suma de dos determinantes} \\ \text{separando las sumas de los elementos de la 1ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= - \left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante vale cero, pues} \\ \text{la columna 1ª y la 2ª son proporcionales} \end{array} \right\} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{Saco factor común 2 en la 1ª columna} \} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = \boxed{-4}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

Estudiamos la posición relativa de ambas rectas.

Previamente obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0, -2, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z + 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow 3(y - z + 2) - y - z = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 3z + 6 - y - z = -4 \Rightarrow 2y - 4z = -10 \Rightarrow y - 2z = -5 \Rightarrow y = -5 + 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 + 2z - z + 2 = -3 + z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(-3, -5, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \end{cases}$$

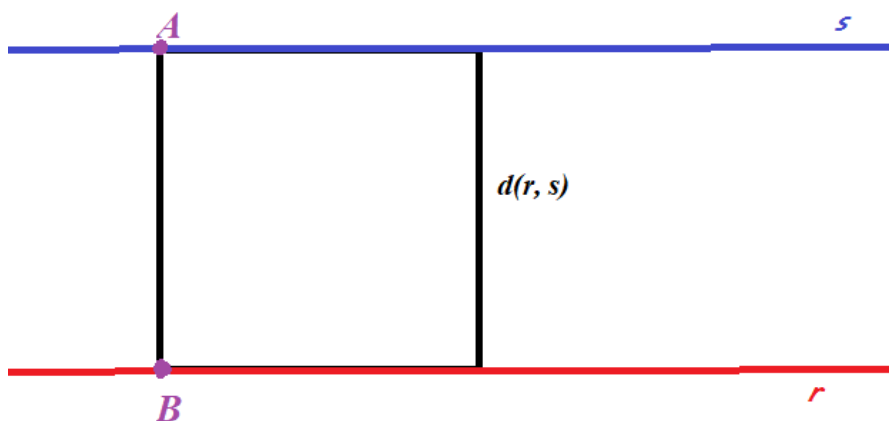
Como tienen el mismo vector director las rectas son paralelas o coincidentes.

$$s \equiv \begin{cases} Q_s(-3, -5, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} P_r(0, -2, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = \vec{v}_s = (1, 2, 1)$$

Vemos si un punto cualquiera de la recta s pertenece a la recta r .

$$\text{¿} Q_s(-3, -5, 0) \in r? \Rightarrow \text{¿} \frac{-3}{1} = \frac{-5+2}{2} = \frac{0-1}{1}? \Rightarrow -3 \neq \frac{-3}{2} \neq -1$$

Las rectas no son coincidentes y son paralelas. Por lo que la situación planteada es:



El área del cuadrado es el cuadrado de su lado que es igual a la distancia entre las rectas r y s .

Para calcular esta distancia necesitamos encontrar dos puntos, un punto A de la recta s y otro B de la recta r que estén enfrentados.

Para ello determino el plano π perpendicular a ambas rectas y que pase por el punto $P_r(0, -2, 1)$, con lo que ya tenemos que el punto B = $P_r(0, -2, 1)$.

Si el plano π es perpendicular a la recta entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P_r(0, -2, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(0, -2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P_r(0, -2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 4 + 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 2y + z + 3 = 0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π y la recta s.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + z + 3 = 0 \\ s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow (-3 + \lambda) + 2(-5 + 2\lambda) + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + \lambda - 10 + 4\lambda + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + \frac{5}{3} = \frac{-4}{3} \\ y = -5 + \frac{10}{3} = \frac{-5}{3} \\ z = \lambda = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

Lado del cuadrado = $d(r, s) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \dots$

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 1) - \left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

$$\dots = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{El área del cuadrado es } \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{21}{9} = \boxed{\frac{7}{3} \simeq 2.33 u^2}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m . **(1.5 puntos)**b) Para $m = 1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s . **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1, 1, 2) \\ \vec{u}_r = (1, 1, m) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x = 2 - z \end{cases} \Rightarrow 2 - z - y + 2z = 3 \Rightarrow z - y = 1 \Rightarrow y = -1 + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(2, -1, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{cases}$$

Si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales las rectas podrían ser paralelas o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, m) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{m}{1} = \frac{m}{1}?$$

Por lo que las rectas nunca pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} P_r(1, 1, 2) \\ \vec{u}_r = (1, 1, m) \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} Q_s(2, -1, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -1, 0) - (1, 1, 2) = (1, -2, -2)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 2m - m - 2 + 2 = m - 1$$

Averiguamos cuando se anula este producto mixto.

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Tenemos dos situaciones diferentes.

CASO 1. Si $m = 1$ el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rQ_s}]$ es nulo y las rectas se cortan.

CASO 2. Si $m \neq 1$ el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rQ_s}]$ es no nulo y las rectas se cruzan.

b) Para $m = 1$ las rectas se cortan y forman un ángulo que determinamos usando el producto escalar de sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

Tenemos que $\cos(r, s) = \frac{1}{3}$.