

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, solo hay que imponer la continuidad en $x = 0$. Primero, el límite de la expresión con $x \neq 0$ debe existir; en particular, su numerador debe tender a cero, lo que exige $1 - a = 0$. Así, $a = 1$.

Con ese valor, el límite es de tipo $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x - e^x}{x^2}.$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

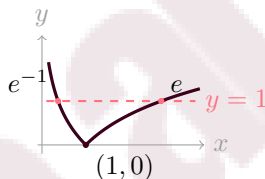
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - e^x}{2} = -1.$$

La continuidad exige que este límite sea igual a $f(0) = b$. Por tanto,

$$a = 1, \quad b = -1.$$

Opción A - Ejercicio 2

La gráfica de $f(x) = |\ln x|$ (con $x > 0$) tiene un mínimo en $(1, 0)$; tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y también cuando $x \rightarrow +\infty$. La recta $y = 1$ corta la gráfica a ambos lados de $x = 1$ y limita con ella el recinto acotado:



b) Los puntos de corte verifican $|\ln x| = 1$, así que $\ln x = 1$ o $\ln x = -1$. Por tanto,

$$x = e \quad \vee \quad x = e^{-1},$$

es decir, los puntos son $(e, 1)$ y $(e^{-1}, 1)$.

c) Entre los puntos de corte la recta está por encima de la gráfica. Además, $|\ln x| = -\ln x$ para $0 < x \leq 1$ y $|\ln x| = \ln x$ para $x \geq 1$, así que dividimos el área en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{1/e}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx \\ &= [x \ln x]_{1/e}^1 + [2x - x \ln x]_1^e \\ &= \frac{1}{e} + (e - 2) = \boxed{e - 2 + \frac{1}{e}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

a) Calculamos el determinante:

$$\det A = -m(m-1)^2.$$

Para que el rango sea 2, el determinante debe anularse y debe existir algún menor de orden 2 no nulo. Los candidatos son $m = 0$ y $m = 1$. El menor formado por las dos primeras filas y las dos últimas columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

para cualquier m . Por ello, en ambos candidatos el rango es exactamente 2:

$$\boxed{m = 0 \quad \text{o} \quad m = 1}.$$

b) Para $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las primeras potencias para ver cuándo se anulan:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A^3 = 0$, todas las potencias con exponente mayor o igual que 3 también son la matriz nula. Por tanto,

$$\boxed{A^{2015} = 0_{3 \times 3}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

a) El ángulo entre dos planos se calcula a partir del ángulo agudo entre sus vectores normales. Para

$$\vec{n} = (1, 3, 2), \quad \vec{n}' = (-2, 1, 3),$$

la relación entre producto escalar, módulos y coseno es

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|}.$$

Aquí $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 7$ y ambos módulos valen $\sqrt{14}$; así,

$$\cos \theta = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\theta = 60^\circ}.$$

b) La intersección del plano $x + 3y + 2z = 5$ con los ejes coordenados tiene interceptos

$$(5, 0, 0), \quad \left(0, \frac{5}{3}, 0\right), \quad \left(0, 0, \frac{5}{2}\right).$$

El volumen del tetraedro formado con el origen es un sexto del producto de las longitudes de sus tres aristas perpendiculares:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \boxed{\frac{125}{36}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función es $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que no tiene asíntotas verticales.

a) Para estudiar las asíntotas en los extremos calculamos los límites. Cuando $x \rightarrow +\infty$, el factor exponencial hace que el producto tienda a cero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

así que $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. Cuando $x \rightarrow -\infty$, $e^{-x} \rightarrow +\infty$ y $x^2 + 3x + 1 \rightarrow +\infty$, luego $f(x) \rightarrow +\infty$; no hay asíntota horizontal en ese extremo. Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = -\infty$, de modo que tampoco hay una asíntota oblicua con pendiente finita.

b) Una tangente horizontal aparece cuando $f'(x) = 0$. Derivamos usando la regla del producto:

$$f'(x) = (2x + 3 - (x^2 + 3x + 1))e^{-x} = -(x + 2)(x - 1)e^{-x}.$$

Como e^{-x} nunca se anula, los puntos críticos tienen abscisas $x = -2$ y $x = 1$. Sus ordenadas son

$$f(-2) = -e^2, \quad f(1) = \frac{5}{e}.$$

Los puntos pedidos son $(-2, -e^2)$ y $(1, 5/e)$.

c) En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. La recta tangente es

$$y - 1 = 2(x - 0) \implies y = 2x + 1.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos por partes dos veces. Sea $I = \int e^{2x} \sin x \, dx$. Tomando $u = \sin x$ y $dv = e^{2x} \, dx$,

$$I = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx.$$

Para la integral restante, otra integración por partes da

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{2}I.$$

Sustituyendo esta expresión en la primera igualdad y despejando I ,

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha + 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha + 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$\det A_{\alpha} = -2\alpha(\alpha - 3).$$

Si $\alpha \neq 0, 3$, el determinante es no nulo, el rango de A_{α} es 3 y, por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $\alpha = 0$, las ecuaciones primera y segunda son ambas $x = 2$. La tercera queda $3x + y + 4z = 7$, que al usar $x = 2$ se reduce a $y + 4z = 1$. Hay dos ecuaciones independientes para tres incógnitas: los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada valen $2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 3$, la tercera ecuación es combinación de las dos primeras. En efecto, al despejar con

$$x + 3z = 2, \quad 2x + 3y = 7,$$

se obtiene que $3x + y + 7z = 7$ queda satisfecha. También en este caso ambos rangos valen $2 < 3$, así que es compatible indeterminado. No aparece ningún caso incompatible.

b) Para $\alpha = 2$, de la primera ecuación $x = 2 - 2z$. La segunda da $x + y = 3$, es decir, $y = 1 + 2z$. Al sustituir en la tercera,

$$3(2 - 2z) + (1 + 2z) + 6z = 7 \implies z = 0.$$

Por tanto, $x = 2$, $y = 1$ y la solución es $\boxed{(2, 1, 0)}$.

Opción B - Ejercicio 4

La recta r se escribe en forma paramétrica tomando el valor común de las razones como t :

$$r : \begin{cases} x = 5 + 6t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tiene punto $R_0 = (5, -1, 0)$ y vector director $\vec{v} = (6, -3, 2)$. Además, $P - R_0 = (-4, 7, -2)$.

a) El plano buscado contiene la dirección $\vec{v}$ y el vector $P - R_0$. Un normal se obtiene con su producto vectorial, que es perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{v} \times (P - R_0) = (-8, 4, 30),$$

que podemos simplificar a $(-4, 2, 15)$. Usando el punto $P = (1, 6, -2)$,

$$-4(x - 1) + 2(y - 6) + 15(z + 2) = 0 \implies \boxed{-4x + 2y + 15z + 22 = 0}.$$

b) La distancia de un punto P a una recta que pasa por R_0 con vector director $\vec{v}$ se calcula mediante

$$d(P, r) = \frac{\|(P - R_0) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

El producto vectorial tiene módulo $\sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 30^2} = 14\sqrt{5}$, mientras que $\|\vec{v}\| = 7$. Así,

$$d(P, r) = \frac{14\sqrt{5}}{7} = \boxed{2\sqrt{5}}.$$