

Junio de 2008 · Convocatoria ordinaria

Resolvemos los cuatro bloques paso a paso. En cada apartado identificamos los datos, escribimos el método y justificamos por qué la respuesta satisface lo que se pide.

Bloque 1 · Problema 1.1

Clasificación del sistema según α . Escribimos su matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array} \right).$$

Por Rouché-Frobenius, comparamos los rangos de estas dos matrices con el número de incógnitas, que es 3. Empezamos calculando el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1) + (1 - \alpha) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2). \end{aligned}$$

Caso 1: $\alpha \neq 1, -2$. El determinante no es cero, por lo que $\text{rg}(A) = 3$. Como la matriz ampliada tiene solo 3 filas, también $\text{rg}(A|b) = 3$. Así,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 = \text{número de incógnitas},$$

y el sistema es compatible determinado (SCD). Restando las ecuaciones por parejas se obtiene

$$(\alpha - 1)(x - y) = 0, \quad (\alpha - 1)(y - z) = 0.$$

Como $\alpha \neq 1$, resulta $x = y = z$. Al sustituir en cualquiera de las ecuaciones:

$$(\alpha + 2)x = 1 \implies x = y = z = \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Caso 2: $\alpha = 1$. Las tres ecuaciones quedan iguales: $x + y + z = 1$. El menor de orden 1 formado por el primer coeficiente vale 1, de modo que $\text{rg}(A) = 1$. En la ampliada, ese mismo menor vale 1 y las otras dos filas repiten la primera; por tanto $\text{rg}(A|b) = 1$. Así,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1 < 3,$$

y el sistema es compatible indeterminado (SCI). Tiene dos parámetros libres, por ejemplo:

$$(x, y, z) = (s, t, 1 - s - t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: $\alpha = -2$. La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es 0, pero el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. Para la matriz ampliada, tomamos las columnas de x, y y del término independiente:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 9 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A|b) = 3$, mayor que $\text{rg}(A) = 2$. El sistema es incompatible (SI). Se ve también sumando las ecuaciones: el lado izquierdo suma 0 y el derecho suma 3, lo que exigiría $0 = 3$.

Solución cuando $\alpha = 0$. Es un caso SCD. Las ecuaciones son $y + z = 1$, $x + z = 1$ y $x + y = 1$. Al restarlas, $x = y = z$; entonces $2x = 1$, y

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Bloque 1 · Problema 1.2

Se pide calcular A^2 , A^3 y expresar $(I + A)^3$ como $\alpha I + \beta A$, con

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos la matriz por sí misma, entrada a entrada:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 17 \cdot 17 + 29 \cdot (-10) & 17 \cdot 29 + 29 \cdot (-17) \\ (-10) \cdot 17 + (-17) \cdot (-10) & (-10) \cdot 29 + (-17) \cdot (-17) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 289 - 290 & 493 - 493 \\ -170 + 170 & -290 + 289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I. \end{aligned}$$

Ahora calculamos la potencia siguiente:

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = -A.$$

Usamos el desarrollo del cubo de un binomio; I conmuta con A :

$$\begin{aligned} (I + A)^3 &= I + 3A + 3A^2 + A^3 \\ &= I + 3A + 3(-I) - A \\ &= -2I + 2A. \end{aligned}$$

En forma matricial,

$$-2I + 2A = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix}.$$

Así, $\alpha = -2$ y $\beta = 2$. La expresión es única porque I y A son linealmente independientes: las entradas fuera de la diagonal de A no son cero, mientras que las de I sí.

Bloque 2 · Problema 2.1

La recta viene dada en forma simétrica por $x - 5 = y = (z + 2)/(-2)$. Para escribirla en forma paramétrica, igualamos las tres expresiones a un parámetro t :

$$r: x = 5 + t, y = t, z = -2 - 2t.$$

Un punto C de la recta debe estar a la misma distancia de $A = (2, 1, 1)$ y $B = (1, 0, -1)$. El lugar geométrico de los puntos equidistantes está en el plano mediador. De $|C - A|^2 = |C - B|^2$ se deduce:

$$2C \cdot (B - A) = |B|^2 - |A|^2.$$

Como $B - A = (-1, -1, -2)$, $|A|^2 = 6$ y $|B|^2 = 2$, queda

$$-2x - 2y - 4z = -4 \iff x + y + 2z = 2.$$

Sustituimos la recta paramétrica en ese plano:

$$(5 + t) + t + 2(-2 - 2t) = 2 \implies 1 - 2t = 2 \implies t = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$C = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right).$$

El área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados. Tomamos

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2 \right),$$

y calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, -7, 4), \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}.$$

Luego el área pedida es

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{66}}{2} \text{ unidades}^2.$$

Bloque 2 · Problema 2.2

Pasamos las dos rectas a forma paramétrica. En la primera, intersección de $y + z = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$, tomamos $y = t$. Entonces $z = -t$ y $x = 1 + 2t$:

$$r: x = 1 + 2t, y = t, z = -t.$$

En la segunda, la ecuación es $x/2 = y - 1 = -z + 3$. Igualamos las tres expresiones a u :

$$s: x = 2u, y = 1 + u, z = 3 - u.$$

Sus vectores directores son $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$, por lo que son paralelas o coincidentes. Tomamos $P = (1, 0, 0) \in r$ y $Q = (0, 1, 3) \in s$. Como $Q - P = (-1, 1, 3)$ no es proporcional a $\vec{v}_r$, las rectas son paralelas distintas.

Para hallar la distancia entre paralelas, dividimos el área del paralelogramo generado por $Q - P$ y un vector director entre la longitud de ese vector:

$$\begin{aligned} d(r, s) &= \frac{|(Q - P) \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} \\ &= \frac{|(-1, 1, 3) \times (2, 1, -1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|(-4, 5, -3)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{16 + 25 + 9}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ unidades.} \end{aligned}$$

Bloque 3 · Problema 3.1

La región está en el primer cuadrante, bajo $h(x) = 1/(4 + x^2)$, entre el eje y y la recta $x = 2$. Estudiamos primero la curva. Su dominio es $\mathbb{R}$, porque $4 + x^2 \geq 4 > 0$: el denominador nunca se anula. Además, $h(x) > 0$ para todo real.

$$h'(x) = \frac{-2x}{(4 + x^2)^2}.$$

El denominador de la derivada es positivo y el único punto crítico es $x = 0$. Comprobamos el signo a ambos lados: $h'(-1) = 2/25 > 0$ y $h'(1) = -2/25 < 0$. Por ello, crece hasta $x = 0$, donde alcanza el máximo $h(0) = 1/4$, y después decrece:

Intervalo o punto	Signo de h' (prueba)	Comportamiento
$(-\infty, 0)$	$h'(-1) > 0$	Crece
$x = 0$	0	Máximo $h(0) = 1/4$
$(0, \infty)$	$h'(1) < 0$	Decrece

Comprobamos las asíntotas: no hay verticales porque el denominador nunca vale cero. En los dos extremos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0,$$

así que la asíntota horizontal es $y = 0$. Para una posible oblicua, $m = \lim h(x)/x = 0$ y $n = \lim(h(x) - mx) = 0$; esto vuelve a dar la horizontal $y = 0$, no una oblicua. En particular, la curva está por encima del eje x en $[0, 2]$, y el área se calcula integrando:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \frac{1}{4 + x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Sea A el área a la izquierda de $x = \alpha$, y B el área a su derecha. La condición es $A = 2B$, por lo que el área total $S = A + B = 3B$, y entonces $A = 2S/3 = \pi/12$.

$$A = \int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Iguamos las dos expresiones de A :

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{12} \implies \arctan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \implies \boxed{\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Este valor pertenece a $[0, 2]$, como requiere la región.

Bloque 3 · Problema 3.2

Primero representamos $f(x) = x^2 - 4$. Es una función polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. La parábola abre hacia arriba. Sus cortes con el eje x se obtienen resolviendo $x^2 - 4 = 0$: son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. El vértice está en $x = 0$, donde $f(0) = -4$.

Para confirmar la forma de la curva, estudiamos su derivada:

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0.$$

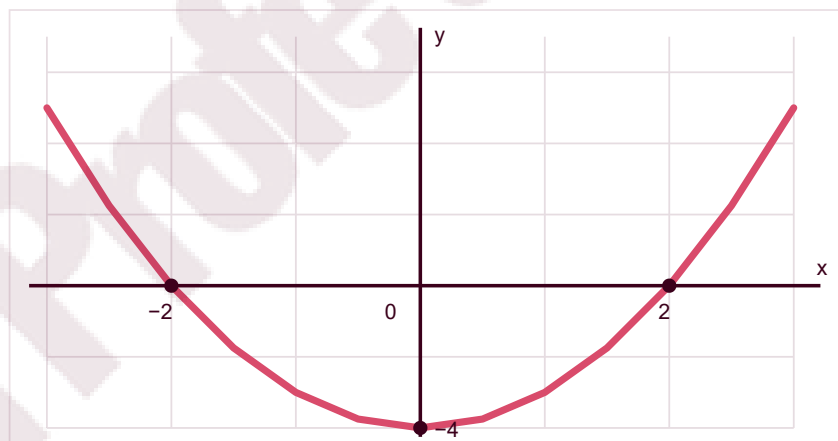
Probamos un valor a cada lado del punto crítico: $f'(-1) = -2 < 0$ y $f'(1) = 2 > 0$. Por tanto, la función decrece antes de 0 y crece después; $(0, -4)$ es su mínimo absoluto. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Intervalo o punto	Prueba	Signo de f'	Conclusión
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	-	Decrece
$x = 0$	Punto crítico	0	Mínimo absoluto $f(0) = -4$
$(0, \infty)$	$x = 1$	+	Crece

Comprobamos también las asíntotas: al ser un polinomio, f está definida para todo real y no tiene asíntotas verticales. Además, $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que no tiene horizontales. Para una posible oblicua, la pendiente tendría que ser finita, pero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty;$$

no existe una pendiente oblicua finita y, por tanto, tampoco una asíntota oblicua.



Para $g(x) = \ln(x^2 - 4)$, el argumento del logaritmo debe ser estrictamente positivo:

$$x^2 - 4 > 0 \iff (x - 2)(x + 2) > 0 \iff x < -2 \text{ o } x > 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{Dom}(g) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)}.$$

Derivamos dentro de ese dominio:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

El denominador es positivo en el dominio, así que el signo de g' es el signo de x . Comprobamos con valores de prueba, uno en cada intervalo:

$$g'(-3) = \frac{-6}{5} < 0, \quad g'(3) = \frac{6}{5} > 0.$$

Además, $g'(x) = 0$ solo daría $x = 0$, que no pertenece al dominio. En la tabla incluimos también los puntos excluidos del dominio:

Intervalo o punto	Signo de g' (prueba)	Comportamiento
$(-\infty, -2)$	$g'(-3) < 0$	Decrece
$x = -2$	Fuera del dominio	Asíntota vertical
$(-2, 2)$	Fuera del dominio	No está definida
$x = 2$	Fuera del dominio	Asíntota vertical
$(2, \infty)$	$g'(3) > 0$	Crece

Comprobamos las asíntotas. Al acercarnos a -2 por la izquierda o a 2 por la derecha, el argumento del logaritmo tiende a 0^+ , de modo que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty.$$

Hay asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 2$. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntotas horizontales. Para una posible asíntota oblicua, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)/x = 0$, pero $g(x) - mx = g(x) \rightarrow +\infty$; no existe asíntota oblicua. Como la función no está acotada superiormente (tiende a $+\infty$ en ambos extremos), **no tiene máximo absoluto**. Tampoco alcanza un mínimo: se aproxima a $-\infty$ junto a las asíntotas.

Bloque 4 · Problema 4.1

Sean x e y la anchura y la altura, en centímetros, de la zona impresa. El área impresa es 18 cm^2 , por lo que $xy = 18$. Los márgenes laterales suman 2 cm y los márgenes superior e inferior suman 4 cm. Por ello, la hoja completa mide $(x+2)$ por $(y+4)$, y queremos minimizar

$$S = (x+2)(y+4), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad xy = 18.$$

Despejamos $y = 18/x$, y reducimos el área a una función de una variable:

$$S(x) = (x+2) \left(\frac{18}{x} + 4 \right) = 4x + 26 + \frac{36}{x}, \quad x > 0.$$

Su derivada y los puntos críticos son

$$S'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \implies x^2 = 9.$$

Como $x > 0$, queda $x = 3$, y entonces $y = 18/3 = 6$. Comprobamos el signo con un valor a cada lado del punto crítico:

$$S'(1) = 4 - 36 = -32 < 0, \quad S'(6) = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Intervalo o punto	Signo de S' (prueba)	Comportamiento
$(0, 3)$	$S'(1) < 0$	Decrece
$x = 3$	0	Mínimo
$(3, \infty)$	$S'(6) > 0$	Crece

Además, $S(x) \rightarrow +\infty$ tanto cuando $x \rightarrow 0^+$ como cuando $x \rightarrow +\infty$. El único punto crítico es, por tanto, el mínimo absoluto. La hoja mide $x+2 = 5 \text{ cm}$ de ancho y $y+4 = 10 \text{ cm}$ de alto:

Dimensiones de la hoja: 5 cm × 10 cm.

Bloque 4 · Problema 4.2

Sea α el ángulo agudo entre el lado oblicuo de 40 cm y la base mayor. La altura del trapecio es la componente vertical del lado oblicuo, $h = 40 \sin \alpha$; su proyección horizontal mide $40 \cos \alpha$. Como la base menor mide 20 cm, la base mayor mide $20 + 40 \cos \alpha$. El área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{20 + (20 + 40 \cos \alpha)}{2} (40 \sin \alpha) \\ &= 800(1 + \cos \alpha) \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= 800(\cos \alpha + \cos 2\alpha) \\ &= 800(2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1). \end{aligned}$$

En el intervalo $(0, \pi/2)$, $\cos \alpha + 1 > 0$. La derivada se anula cuando $\cos \alpha = 1/2$, es decir, $\alpha = \pi/3$. Para justificar que es máximo, probamos un valor a cada lado:

$$S' \left(\frac{\pi}{6} \right) > 0, \quad S' \left(\frac{5\pi}{12} \right) < 0.$$

Intervalo o punto	Signo de S' (prueba)	Comportamiento
$(0, \pi/3)$	$S'(\pi/6) > 0$	Crece
$\alpha = \pi/3$	0	Máximo
$(\pi/3, \pi/2)$	$S'(5\pi/12) < 0$	Decrece

Comprobamos los límites en los extremos geométricos del intervalo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow (\pi/2)^-} S(\alpha) = 800 \text{ cm}^2.$$

El segundo límite no es cero: cuando $\alpha \rightarrow \pi/2$, la ventana se aproxima a un rectángulo de base 20 cm y altura 40 cm. La tabla de signos muestra que el área crece hasta $\pi/3$ y decrece después. Además, $S(\pi/3) = 600\sqrt{3} > 800$, pues $600\sqrt{3} > 800 \iff 27 > 16$; por tanto, el máximo absoluto se alcanza en

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

El valor máximo del área es $S(\pi/3) = 800(1 + 1/2)(\sqrt{3}/2) = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$.